



جمهوری اسلامی ایران

سوالات شبه نهایی

نام درس: ریاضیات گسسته

پایه تحصیلی: دوازدهم

رشته: ریاضی

تاریخ آزمون:

مدت آزمون:

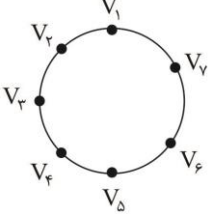
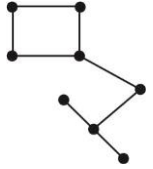
امتحانات نوبت: خرداد ماه

بارم	خانم گرگیج	ردیف									
۱/۵	<p>جاهای خالی را کامل کنید.</p> <p>الف) هر عدد طبیعی و بزرگ تر از یک که هیچ شمارنده‌ی مثبتی بجز یک و خودش نداشته باشد نامیده می‌شود.</p> <p>ب) اگر $(a, b) = [a, b]$ باشد آن‌گاه</p> <p>پ) اگر $N_G(v_i) = \emptyset$ باشد، آن‌گاه بزرگی v_i رأس است.</p> <p>ت) گراف کامل مرتبه ۹ دارای است.</p> <p>ث) در مربع لاتین مقابل درایه‌ها به صورت روبه‌رو هستند x برابر و m برابر است.</p> <table border="1" style="margin-left: 20px;"> <tr> <td>x</td> <td>y</td> <td>z</td> </tr> <tr> <td>t</td> <td>m</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td>n</td> <td>1</td> <td>2</td> </tr> </table>	x	y	z	t	m	3	n	1	2	۱
x	y	z									
t	m	3									
n	1	2									
۱/۵	<p>درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف) اگر $a c$ و $a b$ و $a mb+nc$ آن‌گاه $a b$ و $a c$ است.</p> <p>ب) در گراف G داریم $\partial(G) \geq K$ در این صورت G لزوماً شامل یک مسیر به طول $K+1$ است.</p> <p>پ) $ca \equiv cb \xrightarrow{(c,m)=d} a \equiv c$</p> <p>ت) در گرافی از مرتبه ۱۳ درجه رأس a برابر ۵ است در نتیجه ۷ رأس این گراف توسط a احاطه نمی‌شود.</p> <p>ث) می‌توان ثابت کرد در یک خانواده حداقل ۵ نفره، حداقل دو نفر در یک فصل به دنیا آمده‌اند.</p> <p>ج) به ۲۴۰ طریق مختلف می‌توان از بین ۷ نوع کل، دسته کلی با ۴ شاخه انتخاب کرد.</p>	۲									
۱	<p>اگر a, b, c سه عدد حقیقی باشند ثابت کنید $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$</p>	۳									
۱	<p>الف) اگر a عددی فرد و صحیح باشد و $b a+2$، در این صورت باقیمانده تقسیم عدد $a^2 + b^2 + 3$ بر ۸ را بیابید.</p> <p>ب) باقیمانده تقسیم عدد a بر ۳ و ۴ به ترتیب برابر ۱ و ۳ می‌باشد، باقیمانده تقسیم a بر ۱۲ را بیابید.</p>	۴									
۱	<p>به چند طریق می‌توان ۲۹۰۰۰ تومان را به اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی تبدیل کرد؟</p>	۵									

تاریخ:		دنباله سوال های امتحان درس:																																
۱/۵		<p>۶ گراف G مطابق شکل مقابل است.</p> <p>الف) مجموع درجات رئوس گراف \bar{G} را مشخص کنید.</p> <p>ب) دوری با طول ۵ در گراف G را مشخص نمایید.</p> <p>پ) درجه رأس b را در گراف \bar{G} مشخص کنید.</p>																																
۱/۵		<p>۷ الف) گراف C_7 را رسم نمایید.</p> <p>ب) عدد احاطه‌گری گراف را به دست آورید.</p> <p>پ) یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال معرفی کنید که Min نباشد.</p>																																
۱		<p>۸ اگر n تعداد رئوس گراف و Δ، Max درجه گراف باشد.</p> <p>الف) گرافی رسم کنید که برای آن عدد احاطه‌گر برابر $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ باشد.</p> <p>ب) گرافی رسم کنید که برای آن عدد احاطه‌گر بزرگ‌تر از $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ باشد.</p>																																
۱		<p>۹ یک کران پایین برای عدد احاطه‌گری، گراف ۴- منتظم مرتبه ۱۳ بیان کنید.</p>																																
۱		<p>۱۰ در یک گراف از مرتبه ۱۰ داریم $y(G) = 1$، حداقل و حداکثر اندازه گراف را مشخص کنید.</p>																																
۱/۵		<p>۱۱ معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 14$ چند جواب صحیح نامنفی با شرط $x_i \geq 2$ و $1 \leq i \leq 4$ وجود دارد.</p>																																
۱/۵		<p>۱۲ چند عدد چهاررقمی با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ می‌توان ساخت به طوری که حتماً ارقام ۱، ۲ و ۳ در آن بکار رود (تکرار مجاز است)</p>																																
۱/۵		<p>۱۳ حداقل چند نفر در یک مدرسه وجود داشته باشند تا مطمئن شویم حداقل ۵ نفر در یک روز از ماه و در یک روز از هفته متولد شده‌اند؟</p>																																
۱/۵		<p>۱۴ چند عدد طبیعی $1 \leq n \leq 500$ وجود دارند که نه مضرب ۳ هستند و نه مضرب ۵.</p>																																
۱	<table border="1" data-bbox="178 1624 363 1814"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td>3</td><td>4</td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>2</td><td>1</td><td>4</td><td>3</td></tr> <tr><td>4</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr> </table> <table border="1" data-bbox="470 1624 655 1814"> <tr><td>3</td><td>2</td><td>4</td><td>1</td></tr> <tr><td>4</td><td>1</td><td>3</td><td>2</td></tr> <tr><td>1</td><td>4</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td><td>1</td><td>4</td></tr> </table>	1	2	3	4	3	4	1	2	2	1	4	3	4	3	2	1	3	2	4	1	4	1	3	2	1	4	2	3	2	3	1	4	<p>۱۵ آیا دو مربع لاتین مقابل متعامدند؟ چرا؟</p>
1	2	3	4																															
3	4	1	2																															
2	1	4	3																															
4	3	2	1																															
3	2	4	1																															
4	1	3	2																															
1	4	2	3																															
2	3	1	4																															
<p>موفق و پیروز باشید</p> <p>گروه ریاضی استان سیستان و بلوچستان</p>																																		



پاسخ نامه سوالات شبه نهایی

۱/۵	الف) عدد اول (۰/۲۵) ب) $ a = b $ (۰/۲۵) پ) (ایزوله) (۰/۲۵) ت) ۳۶ یال است. (۰/۲۵) ث) $m=2, x=2$ (۰/۲۵)	۱
۱/۵	الف) درست (۰/۲۵) ب) نادرست (۰/۲۵) ج) نادرست (۰/۲۵) ث) درست (۰/۲۵) ت) نادرست (۰/۲۵)	۲
۱	$a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b \Rightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2 \geq 2ab + 2a + 2b$ $(a^2 + b^2 - 2ab) + (a^2 - 2a + 1) + (b^2 - 2b + 1) \geq 0$ همواره درست $(a-b)^2 + (a-1)^2 + (b-1)^2 \geq 0$	۳
۱	الف) هم فرد $b \mid a+2 \Rightarrow$ فرد $a \Rightarrow$ فرد بنابراین باقیمانده برابر ۵ ب) باقیمانده برابر ۷	۴
۱	$5000x + 2000y = 29000$ $5x + 2y = 29$ $(5, 2) = 1 \mid 297$ $5x \equiv 29$ $x \equiv 1$ $x = 2k + 1$ $5(2k + 1) + 2y = 29$ $2y = 29 - 10k - 5$ $y = 12 - 5k$ به ۳ طریق	۵
۱	$\deg_G(v_i) + \deg_G(v_i) = 6 \times 5 = 30$ $\deg_a v_i = 1 + 3 + 3 + 3 + 2 + 2 = 14$ $14 + \deg_{\bar{a}}(v_i) = 30$ $\deg_{\bar{G}}(v_i) = 16$ (الف) (ب) $abdcea$ (۰/۲۵) پ) $\deg_{\bar{G}}(b) = 2$ (۰/۲۵)	۶
۱/۵	 الف) $[\frac{7}{3}] = 3$ (۰/۵) ب) $\{v_1, v_4, v_6\}$ (۰/۵) پ) $\{v_1, v_3, v_5, v_7\}$ (۰/۵)	۷
۱	الف) P_{10} یا C_{10} (الف) ب)  $y(G) = 3$ (۰/۵) $[\frac{8}{4}] = 2$	۸

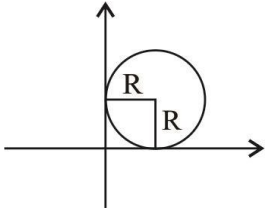
۱	$y(G) \geq \lfloor \frac{13}{5} \rfloor = 3$	۹																																
۱	وقتی $y(G) = 1$ است یعنی گراف رأسی دارد که به همه‌ی رأس‌های دیگر وصل است حداقل تعداد یال‌ها برابر ۹ و حداکثر آن وقتی به دست می‌آید که گراف کامل باشد. $\frac{10 \times 9}{2} = 45$	۱۰																																
۱/۵	$x_1 \geq 2 \Rightarrow x_1 \geq 2, x_2 \geq 2, x_3 \geq 2, x_4 \geq 2$ $14 - 8 = 6 \quad \binom{6+4-1}{4-1} = \binom{9}{3}$	۱۱																																
۱/۵	$ S = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4$ $A \cap B$ ۲ فاقد $\Rightarrow A \cap B = 3^4$ A : ۱ فاقد $\Rightarrow A = 4^4$ $A \cap C$ ۱ و ۳ فاقد $\Rightarrow A \cap C = 3^4$ B : ۲ فاقد $\Rightarrow B = 4^4$ $B \cap C$ ۳ و ۲ فاقد $\Rightarrow B \cap C = 3^4$ C : ۳ فاقد $\Rightarrow C = 4^4$ $A \cap B \cap C$ ۲ و ۱ و ۳ فاقد $\Rightarrow A \cap B \cap C = 2^4$ $ A \cup B \cup C = A + B + C - A \cap B - A \cap C - B \cap C + A \cap B \cap C $ $= 3 \times 4^4 - 3 \times 3^4 + 2^4 = 541$ شامل ۱ و ۲ و ۳ $\Rightarrow \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C} = S - A \cup B \cup C = 5^4 - 541 = 84$	۱۲																																
۱/۵	$30 \times 7 = 210$ هفته $K + 1 = 5 \Rightarrow K = 4$ یک روز از ماه در یک روز از هفته $m > Kn \Rightarrow m > 210 \times 4 = 840$	۱۳																																
	پس حداقل m برابر ۸۴۱ می‌باشد.																																	
۱/۵	A : ۳ مضرب $\Rightarrow A = \lfloor \frac{500}{3} \rfloor = 166$ B : ۵ مضرب $\Rightarrow B = \lfloor \frac{500}{5} \rfloor = 100$ $A \cap B$: ۳ و ۵ مضرب $\Rightarrow A \cap B = \lfloor \frac{500}{15} \rfloor = 43$ $ A \cup B = 166 + 100 - 43 = 223$ $ \bar{A} \cap \bar{B} = S - A \cup B = 500 - 223 = 277$	۱۴																																
۱	اگر دو مربع را ترکیب کنیم عدد دو رقمی ۴۲ دو بار تکرار می‌شود پس متعامد نیستند.	۱۵																																
	<table border="1" style="display: inline-table; margin-right: 20px;"> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td>4</td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td></td><td></td><td></td></tr> </table> <table border="1" style="display: inline-table;"> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td>2</td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>											4		4														2		2				
		4																																
4																																		
		2																																
2																																		

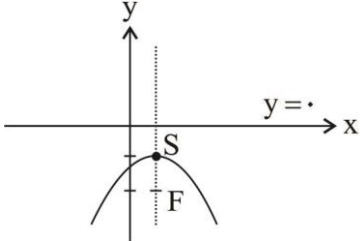


بارم	ردیف	آقای محمد امین آزموده
۰/۵	۱	عبارات درست را با نماد \checkmark و عبارات نادرست را با نماد \times مشخص کنید. الف) شرط لازم و کافی برای آن که ماتریس مربعی A وارون پذیر باشد آن است که دترمینان A برابر صفر باشد. ب) ماکن هندسی مراکز همه دایره‌هایی با شعاع ثابت r که بر خط d در صفحه مماس‌اند دو خط موازی با d است. کامل کنید.
۱	۲	الف) اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ باشد دترمینان A برابر است با ب) ضرب دو بردار خاصیت جابه‌جایی دارد. (داخلی - خارجی)
۱/۵	۳	در ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ اگر $a_{ij} = \begin{cases} 2 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$ آن‌گاه ماتریس $A^2 - 4A$ را به دست آورید.
۱/۷۵	۴	دستگاه زیر را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید. $\begin{cases} 3x - 4y = 1 \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$
۱/۷۵	۵	معادلات دایره‌هایی که از نقطه‌ی $(2, 4)$ گذشته و بر هر دو محور مختصات مماس باشند را به دست آورید.
۱	۶	وضعیت خط $x + y = 2$ و دایره $x^2 + y^2 = 2$ را نسبت به هم مشخص کنید.
۱/۵	۷	در یک بیضی طول قطر کوچک برابر ۴ و طول قطر بزرگ برابر ۶ است فاصله کانونی بیضی را به دست آورید.
۱	۸	اگر $x = 3$ محور تقارن، $y = -4$ خط هادی و $F = (3, 0)$ کانون یک سهمی باشد. الف) معادله سهمی را بنویسید. ب) این سهمی محور عرض‌ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟
۲	۹	مختصات رأس و کانون سهمی $x^2 - 2x + 4y + 5 = 0$ را بیابید سپس نمودار سهمی را رسم کنید.
۱/۲۵	۱۰	اگر $\vec{a} = 5\vec{k} + \vec{j}$ و $\vec{b} = \vec{i} - \vec{k}$ و $r = \frac{1}{5}$ آن‌گاه اندازه‌ی بردار $r\vec{a} + \vec{b}$ را بیابید.
۱/۷۵	۱۱	زاویه بین دو بردار $\vec{a} = (2, -1, 2)$ و $\vec{b} = (1, -1, 0)$ را به دست آورید.
۱/۵	۱۲	تصویر قائم بردار $\vec{a} = (0, -3, 6)$ بر امتداد بردار $\vec{b} = (2, -1, -2)$ را بیابید.
۱/۵	۱۳	اگر $\vec{a} = \vec{j} + 2\vec{k}$ و $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{k}$ ابتدا بردار عمود بر دو بردار را بیابید سپس اندازه‌ی آن را محاسبه کنید.
۱/۵	۱۴	حجم متوازی‌السطوحی را به دست آورید که توسط بردارهای $\vec{a} = (1, 1, 1)$ و $\vec{b} = (2, 2, 1)$ و $\vec{c} = (-1, 1, -1)$ تولید می‌شود؟
		موفق و پیروز باشید گروه ریاضی استان سیستان و بلوچستان



پاسخ نامه سوالات شبه نهایی

۱	(الف نادرست (۰/۲۵) (ب درست (۰/۲۵)	
۲	(الف) ۱۰- (۰/۵) (ب ضرب داخلی (۰/۵)	
۳	$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} (0/25) \quad A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix} (0/5)$ $4A = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 8 & 4 & 8 \\ 8 & 8 & 4 \end{bmatrix} (0/25) \quad A^2 - 4A = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 8 & 4 & 8 \\ 8 & 8 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} (0/25)$	
۴	$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} (0/25) \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} (0/25) \quad Ax = B \quad x = A^{-1}B (0/25)$ $ A = 6 - 4 = 2 (0/25) \quad A^{-1} = \frac{1}{ A } \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} (0/25)$ $A^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} (0/5)$	
۵	$(2-R)^2 + (4-R)^2 = R^2 (0/5)$ $4 - 4R + R^2 + 16 - 8R + R^2 = R^2 (0/25)$ $(0/25) \quad R^2 - 12R + 20 = 0 \Rightarrow R = 2 (0/25)$ $(R - 2)(R - 10) = 0 \Rightarrow R = 10 (0/25)$ $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4 (0/25)$ $(x-10)^2 + (y-10)^2 = 100 (0/25)$ 	
۶	$x + y - 2 = 0 \quad d = \frac{ 1(0) + 1(0) - 2 }{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} (0/25)$ x_0, y_0 $(0,0) (0/25) \quad d = \frac{ ax_0 + by_0 + c }{\sqrt{a^2 + b^2}} (0/25)$ $x^2 + y^2 = (\sqrt{2})^2 \Rightarrow R = \sqrt{2} (0/25) \text{ خط بر دایره مماس است}$	
۷	$ b = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}$	
۸	$(3, -2) (0/25) \quad a = 2 (0/25)$ $(x-3)^2 = 8(y+2) (0/5)$ $x=0 \Rightarrow 9 = 8y + 16 (0/2) \Rightarrow 8y = -7 \Rightarrow y = -\frac{7}{8} (0/25)$	

	$x^2 - 2x + 1 - 1 = -4y - 5 \quad (0/25) \quad (x-1)^2 = -4y - 4 \quad (0/25)$ <p style="text-align: center;">سہمی قائم</p> $(x-1)^2 = -4(y+1) \quad (0/25) \longrightarrow S(1, -1) \quad (0/25) \quad a = -1 \quad (0/25)$ <p>کانون $(1, -2) \quad (0/25)$</p> 	۹
	$\vec{a} = (0, 1, 5) \quad (0/25)$ $\vec{b} = (1, 0, -1) \quad (0/25)$ $2\vec{a} + \vec{b} = (0, \frac{1}{5}, 1) + (1, 0, -1) = (1, \frac{1}{5}, 0)$ $\sqrt{1^2 + (\frac{1}{5})^2 + 0^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{25}} = \sqrt{\frac{26}{25}} = \frac{\sqrt{26}}{5} \quad (0/25)$	۱۰
	$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \vec{b} \cos \theta \quad (0/25)$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = (1)(1) + (-1)(-1) + 0 \times 2 = 3 \quad (0/25)$ $ \vec{b} = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}$ $ \vec{a} = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (2^2)} = 3 \quad (0/25)$ $3 = 3 \times \sqrt{2} \times \cos \theta \quad (0/25) \quad \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (0/25) \quad \theta = \frac{\pi}{4} \quad (0/25)$	۱۱
	<p style="text-align: right;">تصویر قائم بردار</p> $\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{b} ^2} \vec{b} = \frac{0+3-12}{(\sqrt{4+1+4})^2} (2, -1, -2) = -\frac{9}{9} (2, -1, -2) = (-2, 1, 2)$ <p style="text-align: center;">(0/25) (0/25) (0/25) (0/25) (0/25)</p>	۱۲
	$\vec{a} = (0, 1, 2) \quad (0/25)$ $\vec{b} = (2, 0, 1) \quad (0/25)$ $(0, 1, 2) \times (2, 0, 1) = (1, 4, -2) \quad (0/5)$ $\sqrt{1^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{21} \quad (0/25)$ <p style="text-align: center;">(0/25)</p>	۱۳
	$V = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) $ $\vec{b} \times \vec{c} = (2, 2, 1) \times (-1, 1, -1) = (-3, 1, 4) \quad (0/5)$ $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (1, 1, 1) \cdot (-3, 1, 4) = -3 + 1 + 4 = 2$ <p style="text-align: center;">(0/25) (0/25)</p>	۱۴