

سوالات موضوعی نهایی

ریاضیات گسسته

پایه دوازدهم رشته‌ی ریاضی فیزیک

سال تحصیلی ۹۹-۹۸

آخرین نسخه: شهریور ۹۸

تهیه‌کننده: جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه استان خوزستان

((فصل اوّل : آشنایی با نظریه‌ی اعداد))



درس ۱: استدلال ریاضی

استدلال ریاضی

دی ۹۷	نمره ۰/۲۵	۱	درستی یا نادرستی گزاره‌ی زیر را مشخص کنید. اگر k حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آنگاه $4k + 1$ مربع کامل است.
خرداد ۹۸ خ	نمره ۱	۲	اگر a و b دو عدد صحیح باشند و ab عددی فرد باشد، ثابت کنید $a^2 + b^2$ زوج است.
شهریور ۹۸	نمره ۰/۵	۳	درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید. الف: مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است. ب: برای هر عدد طبیعی n بزرگتر از ۱، عدد $2^n - 1$ اول است.

اثبات با در نظر گرفتن همه‌ی حالت‌ها (روش اشیاع)

		۱	
		۲	

اثبات غیر مستقیم

دی ۹۷	نمره ۱/۲۵	۱	اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد. ثابت کنید $\alpha + 2\beta$ گنگ است.
تیر ۹۸	نمره ۱/۲۵	۲	ثابت کنید حاصل جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

اثبات بازگشتی / گزاره های هم ارز

۱ نمره	دی ۹۷	گزاره‌ی زیر را به روش بازگشتی (گزاره های هم ارز) ثابت کنید. برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم: $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$
۱ نمره	خرداد ۹۸	ثابت کنید، میانگین حسابی دو عدد نامنفی از میانگین هندسی آنها کمتر نیست.
۰/۷۵ نمره	تیر ۹۸	گزاره‌ی زیر را به روش بازگشتی (گزاره های هم ارز) ثابت کنید. برای هر عدد حقیقی $a > 0$ داریم: $a + \frac{1}{a} \geq 2$
۱ نمره	خرداد ۹۸ خ	گزاره‌ی زیر را به روش بازگشتی ثابت کنید. برای دو عدد حقیقی x و y نشان دهید: $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$
۱/۵ نمره	شهریور ۹۸	برای هر سه عدد حقیقی x و y و z ثابت کنید. $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz$

درس ۲: بخش پذیری در اعداد صحیح

عاد کردن و ویژگی های آن

۱ نمره	دی ۹۷	اگر $a > 1$ و $a 9k + 4$ و $a 5k + 3$ ثابت کنید a عددی اول است.
۱/۲۵ نمره	تیر ۹۸	اگر عددی مانند k در Z باشد به طوری که $4k + 1 5$ ، ثابت کنید $16k^2 + 28k + 6 25$
۰/۲۵ نمره	خرداد ۹۸ خ	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. اگر $a^2 b^3$ آنگاه $a b$

بزرگترین مقسوم علیه مشترک و کوچکترین مضرب مشترک دو عدد

۰/۲۵ نمره	دی ۹۷	درستی یا نادرستی گزاره‌ی زیر را مشخص کنید. هر دو عدد صحیح متوالی نسبت به هم اول اند.
--------------	-------	---

۰/۵ نمره	تیر ۹۸	در جای خالی عدد مناسب قرار دهید. حاصل $[12, (6, 8)]$ برابر خواهد شد.	۲
۰/۲۵ نمره	خرداد ۹۸ خ	حاصل عبارت مقابل کدام یک از گزینه های زیر است؟ $([m^2, m], m^5) = \dots$ الف) m ب) m^0 ج) m^5 د) m^2	۳
۰/۵ نمره	شهریور ۹۸	جای خالی را پر کنید. $[a, b] = c$ اگر و تنها اگر دو شرط زیر برقرار باشند. و $\forall m > 0$ ۲) $a c$ و $b c$ ۱)	۴

قضیه‌ی تقسیم و کاربردها

۱/۲۵ نمره	دی ۹۷	پاسخ سؤال زیر را به دست آورید. دلیل پاسخ خود را به طور کامل بنویسید. اگر عددی صحیح و فرد باشد و $b a + 2$ در این صورت باقی مانده‌ی تقسیم عدد $a^2 + b^2 + 3$ را بر ۸ بیابید.	۱
۱/۵ نمره	خرداد ۹۸	اگر باقی مانده‌ی تقسیم m و n بر ۱۳ به ترتیب اعداد ۲ و ۹ باشد. در این صورت باقی مانده‌ی تقسیم عدد $5n - 3m$ بر ۱۳ را به دست آورید.	۲
۰/۵ نمره	خرداد ۹۸ خ	در جاهای خالی عدد مناسب قرار دهید. در تقسیم عدد ۱۲۷ - بر ۱۵ باقیمانده برابر و خارج قسمت است.	۳
۱/۵ نمره	شهریور ۹۸	اگر باقی مانده‌ی تقسیم a بر دو عدد ۶ و ۵ به ترتیب ۳ و ۲ باشد، باقی مانده‌ی تقسیم عدد a را بر ۳۰ بیابید.	۴

افراز مجموعه‌ی اعداد صحیح

۰/۲۵ نمره	تیر ۹۸	درستی یا نادرستی گزاره‌ی زیر را مشخص کنید. مربع هر عدد فرد را می توان به صورت $8k - 1$ نوشت. ($k \in Z$)	۱
			۲

درس ۳: بخش پذیری در اعداد صحیح و کاربرد ها

همنهستی و ویژگی های آن

۱ نمره	دی ۹۷	پاسخ سؤال زیر را به دست آورید. دلیل پاسخ خود را به طور کامل بنویسید. باقی مانده‌ی تقسیم عدد $10 + 12 \times (1000)^3$ بر ۷ را به دست آورید.
۱ نمره	خرداد ۹۸	اگر در یک سال، شنبه روز اول مهر باشد. در این صورت با استفاده از همنهستی تعیین کنید ۱۲ بهمن، در همان سال چه روزی از هفته است؟
۰/۵ نمره	خرداد ۹۸ خارج ک	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. الف: اگر $a \equiv b$ و $n m$ آنگاه $a \equiv b$ ب: باقیمانده تقسیم عدد $A = 4985327$ بر عدد ۱۱ برابر ۶ است.
۰/۲۵ نمره	خرداد ۹۸ خ	در جای خالی کلمه‌ی مناسب قرار دهید. اگر ۱۲ بهمن جمعه باشد، ۳۱ مرداد همان سال است.
۱/۵ نمره	شهریور ۹۸	باقی مانده‌ی تقسیم $19 + (27)^7$ را بر ۱۳ بیابید.

معادله‌ی همنهستی

۱ نمره	دی ۹۷	معادله‌ی همنهستی $3x \equiv 13 \pmod{7}$ را حل کرده و جواب عمومی آن را بدست آورید.
۱ نمره	تیر ۹۸	جواب عمومی معادله‌ی $4x \equiv 17 \pmod{5}$ را به دست آورید.

معادله‌ی سیاله

۱/۵ نمره	خرداد ۹۸	با تبدیل معادله‌ی سیاله‌ی خطی $5x + 2y = 18$ به معادله‌ی هم نهستی و حل آن، جواب های عمومی این معادله را بیابید.
۱ نمره	خرداد ۹۸ خ	جواب های عمومی معادله‌ی سیاله‌ی خطی $7x + 5y = 11$ را بدست آورید.

شماره پرسش	۳
نمره	با تبدیل معادله ی سیاله ی خطی $2000x + 5000y = 29000$ به معادله ی هم نهشتی و حل آن ، جواب عمومی این معادله را بیابید.

تهیه کننده : جابر عامری

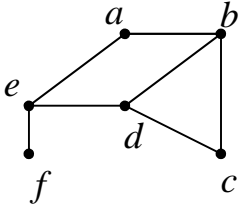
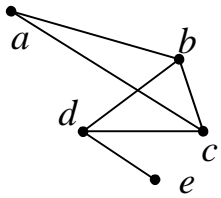
عضو گروه ریاضی دوره ی دوّم متوسطه استان خوزستان

((فصل دوم : گراف و مدل سازی))

درس ۱ : معرفی گراف

تعاریف و اثبات ها

۰/۵ نمره	دی ۹۷	<p>۱ درستی یا نادرستی گزاره های زیر را مشخص کنید. الف : گراف حاصل از مدل سازی پل کونیکسبرگ یک گراف ساده است. ب : گراف ۳ - منتظم از مرتبه ۵ قابل رسم نیست.</p>
۱/۵ نمره	دی ۹۷	<p>۲ با توجه به گراف شکل مقابل (گراف G) به سئوالات زیر پاسخ دهید.</p> <div style="text-align: center;"> </div> <p>الف : یک $a - c$ مسیر به طول ۳ بنویسید. ب : یک دور به طول ۴ مشخص کنید. پ : درجه ی رأس a در گراف G را تعیین کنید. ت : آیا گراف G همبند است؟ چرا؟ ث : یک زیر گراف تهی ۵ رأسی، از گراف G رسم کنید.</p>
۱ نمره	دی ۹۷	<p>۳ ثابت کنید تعداد رأس های فرد هر گراف ، عددی زوج است.</p>
۱ نمره	دی ۹۷	<p>۴ گراف G با مجموعه ی رأس های $V(G) = \{a, b, c, d, e\}$ و مجموعه ی یال های $E(G) = \{ae, bc, bd, be, ec, ed\}$</p> <p>مفروض است. با توجه به این گراف به سئوالات زیر پاسخ دهید. الف : مجموعه ی همسایگی های باز رأس d را بنویسید. ب : اندازه ی گراف را مشخص کنید. ج : مجموع درجات رئوس این گراف برابر چند است؟</p>
۱ نمره	دی ۹۷	<p>۵ گراف کامل K_p دارای ۳۶ یال است. مرتبه ی گراف و مقادیر $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را تعیین کنید.</p>

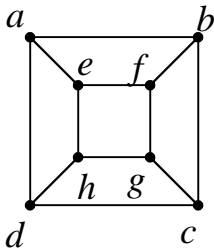
۰/۵ نمره	۹۸ خرداد	<p>۶ در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.</p> <p>یک گراف کامل ۸ رأسی ، یال دارد.</p>
۱/۵ نمره	۹۸ خرداد	<p>۷ شکل مقابل نمودار گراف G می باشد.</p> <p>الف: مرتبه و اندازه‌ی گراف G را بنویسید.</p> <p>ب : مجموعه‌ی $N_G(b)$ را بنویسید.</p> <p>ج : مجموع درجه‌های رأس‌های گراف \overline{G} را مشخص کنید.</p> 
۰/۵ نمره	۹۸ تیر	<p>۸ در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.</p> <p>اگر G یک گراف n رأسی باشد، مقدار $q(G) + q(\overline{G})$ برابر است.</p>
۱/۵ نمره	۹۸ تیر	<p>۹ گراف G را مطابق شکل مقابل در نظر بگیرید.</p> <p>الف) مجموعه‌ی رئوس و مجموعه‌ی یال‌ها را بنویسید.</p> <p>ب) در گراف G، یک دور به طول ۳ بنویسید.</p> <p>ج) درجه‌ی رأس e را در گراف \overline{G} مشخص کنید.</p> 
۰/۲۵ نمره	۹۸ خرداد	<p>۱۰ درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.</p> <p>مینیمم درجه در یک گراف ساده عددی غیر صفر است.</p>
۰/۵ نمره	۹۸ خرداد	<p>۱۱ در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید.</p> <p>P_n گرافی است که تنها از یک مسیر تشکیل شده است.</p>
۲ نمره	شهریور ۹۸	<p>۱۲ گراف G با مجموعه‌ی رأس‌های $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ و مجموعه‌ی یال‌های زیر را در نظر بگیرید.</p> $E = \{ab, bc, cd, ed, ae, cf, ef\}$ <p>الف : نمودار گراف را رسم کنید.</p> <p>ب : $N_G[b]$ را مشخص کنید.</p> <p>ج : یک مسیر به طول ۵ از b به d بنویسید.</p>

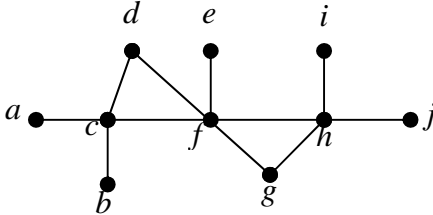
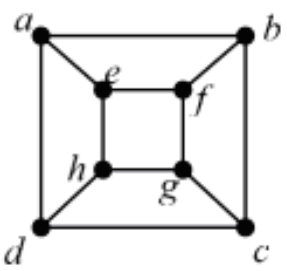
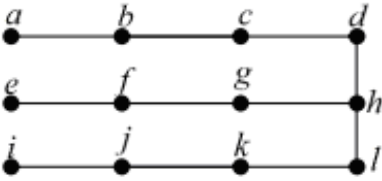
شماره	شماره	<p>در هر مورد یک گراف ۵ رأسی غیر تهی $k -$ منتظم رسم کنید، به طوری که:</p> <p>الف: k بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد. ب: k بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.</p>	۱۳
-------	-------	--	----

درس ۲: مدل سازی با گراف

احاطه گری

شماره	شماره	<p>گراف P_{12} در شکل مقابل رسم شده است.</p>  <p>الف: یک $\gamma -$ مجموعه از این گراف مشخص کنید.</p> <p>ب: یک مجموعه ی احاطه گر مینیمال ۶ عضوی از آن را مشخص نمایید.</p>	۱
شماره	شماره	<p>در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.</p> <p>الف: در یک گراف از مرتبه ی ۱۰ با $\Delta = 3$ حداقل رأس برای احاطه ی همه ی رئوس لازم است.</p> <p>ب: اگر در گراف G از مرتبه ی p داشته باشیم، $\gamma(G) = 1$ در این صورت $\Delta(G)$ برابر است.</p>	۲
شماره	شماره	<p>گراف C_7 را در نظر بگیرید و به سئوالات زیر پاسخ دهید.</p> <p>الف: یک مجموعه ی احاطه گر ۴ عضوی بنویسید.</p> <p>ب: عدد احاطه گری C_7 را به دست آورید.</p> <p>ج: دو مجموعه ی احاطه گر مینیمم متمایز بنویسید.</p>	۳
شماره	شماره	<p>الف: ثابت کنید هر مجموعه ی احاطه گر غیر مینیمال را می توان با حذف برخی از رئوسش به یک مجموعه ی احاطه گر می نیمال تبدیل کرد.</p> <p>ب: در گراف روبرو یک مجموعه ی احاطه گر می نیمال ۵ عضوی را مشخص کنید.</p> 	۴

انصره	خرداد ۹۸	<p>الف : یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه گری ۲ رسم کنید که یک مجموعه‌ی احاطه گر یکتا با اندازه‌ی ۲ داشته باشد.</p> <p>ب : یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه گری ۲ رسم کنید که بیش از یک مجموعه‌ی احاطه گر یکتا با اندازه‌ی ۲ داشته باشد.</p>	۵
۰/۵ نمره	تیر ۹۸	جای خالی را با عدد مناسب کامل کنید. عدد احاطه گری گراف C_n برابر می باشد.	۶
۰/۵ نمره	تیر ۹۸	درستی یا نادرستی گزاره های زیر را تعیین کنید. الف: یک $\gamma -$ مجموعه در گراف P_5 ، دارای ۲ عضو است. ب : تعداد کمتر از $\left\lfloor \frac{n}{\Delta + 1} \right\rfloor$ رأس نمی توانند تمام n رأس گراف را احاطه کنند.	۷
۱/۵ نمره	تیر ۹۸	در هر قسمت، گراف خواسته شده را رسم کنید. الف) یک گراف ۲ منتظم از مرتبه‌ی ۸ که عدد احاطه گری آن کمترین مقدار ممکن را داشته باشد. ب) یک گراف ۵ رأسی که $\gamma -$ مجموعه‌ی آن با اندازه‌ی یک باشد. ج) یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه گری ۲ که یک مجموعه‌ی احاطه گر یکتا با اندازه‌ی ۲ داشته باشد.	۸
۱/۵ نمره	تیر ۹۸	اگر عدد احاطه گری در یک گراف ۵ رأسی برابر یک باشد، در این صورت $V(G)$ و حداقل و حداکثر تعداد یالهایی را که گراف G می تواند داشته باشد را مشخص کنید.	۹
انصره	تیر ۹۸	<p>در گراف شکل مقابل :</p>  <p>الف) یک مجموعه‌ی احاطه گر مینیمم مشخص کنید. ب) یک مجموعه‌ی احاطه گر مینیمال مشخص کنید که مینیمم نباشد.</p>	۱۰
انصره	خرداد ۹۸ خ	مفاهیم زیر را تعریف کنید. الف) مجموعه‌ی احاطه گر ب) عدد احاطه گری	۱۱

<p>نمره ۱/۵</p>	<p>خرداد ۹۸ خارج کشور</p>	<p>در گراف شکل مقابل :</p> <p>الف) یک مجموعه ی احاطه گر بنویسید.</p> <p>ب) یک مجموعه ی احاطه گرمینمال بنویسید.</p> <p>پ) یک مجموعه ی احاطه گر مینیمم بنویسید.</p> 	<p>۱۲</p>
<p>نمره ۱/۵</p>	<p>خرداد ۹۸ خارج کشور</p>	<p>عدد احاطه گری گراف های زیر را تعیین کرده و سپس برای هر گراف یک γ-مجموعه بنویسید .</p> <p>الف)</p>  <p>ب)</p> 	<p>۱۳</p>
<p>نمره ۱</p>	<p>خرداد ۹۸ خارج ک</p>	<p>الف) گراف ۶ رأسی رسم کنید که عدد احاطه گری آن یک باشد .</p> <p>ب) گراف ۶ رأسی رسم کنید که عدد احاطه گری آن ۲ بوده و مجموعه ی احاطه گری مینیمم آن یکتا باشد.</p>	<p>۱۴</p>
<p>نمره ۱/۵</p>	<p>شهریور ۹۸</p>	<p>الف : گراف P_8 را رسم کنید.</p> <p>ب : یک γ - مجموعه از آن را مشخص کنید.</p> <p>ج : یک مجموعه ی احاطه گر میمینال ۴ عضوی از آن را مشخص نمایید.</p>	<p>۱۵</p>

۱ نمره	شهریور ۹۸	<p>۱۶ در گراف شکل زیر یک مجموعه‌ی احاطه گر غیرمینیمال انتخاب کنید. سپس با حذف برخی از رأس‌ها، آن را به یک مجموعه‌ی احاطه گر مینیمال تبدیل نمایید.</p>	۱۶
-----------	-----------	---	----

تهیه کننده: جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه استان خوزستان

((فصل سوّم : ترکیبیات (شمارش)))



درس ۱ : مباحثی در ترکیبیات

یادآوری و تکمیل

۱ نمره	دی ۹۷	اگر داشته باشیم $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$. در این صورت چند کد رمز ۵ رقمی می توان نوشت که هر یک شامل دو رقم (متمایز) از A و سه رقم (متمایز) از B باشد؟
۱/۵ نمره	خرداد ۹۸	۶ دانش آموز پایه ی دوازدهم و ۵ دانش آموز پایه ی یازدهم به چند طریق می توانند کنار هم در یک ردیف قرار گیرند؟ به طوری که : الف : به صورت یک در میان قرار بگیرند. ب : همواره دانش آموزان یازدهم کنار هم باشند. ج : یک دانش آموز خاص یازدهم و یک دانش آموز خاص دوازدهم در کنار هم باشند.
۱ نمره	تیر ۹۸	می خواهیم ۸ نفر را که دو به دو برادر یکدیگرند در دو طرف یک میز مستطیل شکل بنشانیم، اگر بخواهیم هر نفر روبروی برادرش بنشیند، به چند طریق می توان این کار را انجام داد.
۱/۵ نمره	شهریور ۹۸	۴ کتاب فیزیک متفاوت و ۵ کتاب ریاضی متفاوت را می توانیم به چند طریق در قفسه ای و در یک ردیف بچینیم به طوری که : الف : همواره کتابهای فیزیک کنار هم باشند. ب : هیچ دو کتاب ریاضی کنار هم نباشند. ج : یک کتاب ریاضی خاص و دو کتاب فیزیک همواره کنار هم باشند.

معادلات حسابی

۱ نمره	دی ۹۷	به چند طریق می توان ۸ توپ یکسان را بین ۴ نفر توزیع کرد، هرگاه بخواهیم هر نفر حداقل یک توپ داشته باشد؟
۱ نمره	خرداد ۹۸	تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله ی $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_5 = 10$ با شرط $x_i > 0$ و $i = 2, 3, 4, 5$ را محاسبه کنید.
۱/۵ نمره	تیر ۹۸	تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله ی زیر را بدست آورید. $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_5 = 12$ $x_1 > 2$, $x_5 \geq 4$

سئوالات موضوعی امتحانات نهایی کشوری فصل سوم درس ریاضیات گسسته پایه‌ی دوازدهم رشته‌ی ریاضی

۲ نمره	خرداد ۹۸ خ	الف) به چند طریق از بین ۴ نوع گل، دسته‌گلی شامل ۸ شاخه گل را به دلخواه انتخاب کرد؟ ب) اگر از هر ۴ نوع گل حداقل یکی انتخاب شود، به چند طریق می‌توان ۸ شاخه گل را انتخاب کرد؟
۱ نمره	شهریور ۹۸	تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_1 + x_2 + \dots + x_6 = 12$ با شرط $x_5 \geq 4$ و $x_2 > 4$ را محاسبه کنید.

جایگشت‌های با تکرار

۱ نمره	خرداد ۹۸	با ارقام ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ و ۲ و ۱ و ۱ چند عدد ۹ رقمی می‌توان نوشت؟
۱ نمره	تیر ۹۸	۹ نفر به چند طریق می‌توانند در سه اتاق ۲ نفره، ۳ نفره و ۴ نفره واقع در یک هتل اسکان یابند.
۰/۵ نمره	خرداد ۹۸ خ	در جاهای خالی عدد مناسب بنویسید. تعداد رمزهای چهار رقمی که با ارقام ۱ و ۱ و ۱ و ۲ می‌توان ساخت برابر است.

مربع‌های لاتین

۱/۵ نمره	دی ۹۷	دو مربع لاتین متعامد از مرتبه‌ی ۳ بنویسید و متعامد بودن آنها را نشان دهید.
۰/۵ نمره	خرداد ۹۸	در جای خالی عدد مناسب قرار دهید. مجموع درایه‌های سطر اول یک مربع لاتین ۵ در ۵ برابر با است.
۱/۵ نمره	خرداد ۹۸	اگر سه دوست هم‌سایز، سه‌کت و سه پیراهن داشته باشند و بخواهند در سه روز اول هفته از این لباس‌ها به گونه‌ای استفاده کنند که هر فرد هر یک از کت‌ها و هر یک از پیراهن‌ها را دقیقاً یک بار استفاده کرده باشد و هر کت با هر پیراهن نیز دقیقاً یکبار مورد استفاده قرار بگیرد، بنویسید که چگونه می‌توانند این کار را انجام دهند؟
۰/۲۵ نمره	تیر ۹۸	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. برای $n = 1, 2, 6$ دو مربع لاتین متعامد از مرتبه‌ی n وجود ندارد.

۱/۵ نمره	تیر ۹۸	دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ی ۳ بنویسید.																
۱ نمره	خرداد ۹۸ خارج کشور	برای مربع لاتین مقابل یک جایگشت مشخص کرده، نشان دهید مربع جدید، خود مربع لاتین است ؟ <table border="1" style="margin: 10px auto;"> <tr><td>۴</td><td>۲</td><td>۱</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td><td>۴</td></tr> <tr><td>۱</td><td>۴</td><td>۳</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td><td>۱</td></tr> </table>	۴	۲	۱	۳	۳	۱	۲	۴	۱	۴	۳	۲	۲	۳	۴	۱
۴	۲	۱	۳															
۳	۱	۲	۴															
۱	۴	۳	۲															
۲	۳	۴	۱															
۱ نمره	شهریور ۹۸	قرار است چهار مدرس T_1 و T_2 و T_3 و T_4 در چهار جلسه ی متوالی در چهار کلاس C_1 و C_2 و C_3 و C_4 تدریس کنند. برای این منظور برنامه ریزی نمایید.																

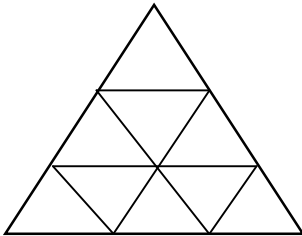
درس ۲: روش هایی برای شمارش

اصل شمول و عدم شمول

۲ نمره	دی ۹۷	به چند طریق می توان ۴ خودکار متفاوت را بین سه نفر توزیع کرد به شرط آنکه به هر نفر حداقل ۱ خودکار داده باشیم؟ (راه حل نوشته شود).
۱/۲۵ نمره	خرداد ۹۸	در بین اعداد ۱ تا ۹۰ چند عدد وجود دارد که بر ۲ یا ۳ بخش پذیر باشند؟ راه حل خود را بنویسید.
۱/۵ نمره	تیر ۹۸	چند عدد طبیعی مانند n به طوری که $1 \leq n \leq 200$ ، وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۳ و ۴ بخش پذیر نباشند؟ (بر ۳ بخش پذیر نباشند و بر ۴ بخش پذیر نباشند).
۱/۵ نمره	خرداد ۹۸ خ	به چند طریق می توان ۴ خودکار متفاوت را بین ۳ نفر توزیع کرد به شرط آنکه به هر نفر حداقل یک خودکار داده باشیم؟
۱/۵ نمره	خرداد ۹۸ خ	بین اعداد طبیعی ۱ تا ۴۰۰ ($1 \leq n \leq 400$) چند عدد وجود دارد که : الف) بر ۴ بخش پذیر باشد ولی بر ۷ بخش پذیر نباشد؟ ب) فقط بر یکی از اعداد ۴ یا ۷ بخش پذیر باشد؟
۱/۵ نمره	شهریور ۹۸	چند عدد طبیعی مانند n به طوری که $1 \leq n \leq 350$ وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۴ و ۶ بخش پذیر نباشند؟

اصل لانه کبوتری

سئوالات موضوعی امتحانات نهایی کشوری فصل سوم درس ریاضیات گسسته پایه‌ی دوازدهم رشته‌ی ریاضی

۱/۵ نمره	دی ۹۷	۱ حداقل چند نفر در یک سالن ورزشی مشغول تماشای مسابقه‌ی کشتی باشند تا مطمئن باشیم لااقل ۲۰ نفر از آنها روز تولدشان یکسان است؟ (سال را غیر کیسه در نظر بگیرید.)
۱/۲۵ نمره	خرداد ۹۸	۲ ثابت کنید اگر در یک دبیرستان حداقل ۵۰۵ دانش آموز مشغول به تحصیل باشند، لااقل ۷ نفر از آنها روز هفته و ماه تولدشان یکسان است.
۱/۲۵ نمره	تیر ۹۸	۳ تعیین کنید که در یک اردوی دانش آموزش چند دانش آموز وجود داشته باشند تا اطمینان داشته باشیم که حداقل ۷ نفر از آنها ماه تولد یکسانی دارند؟
۱/۵ نمره	خرداد ۹۸ خارج کشور	۴ یک مثلث متساوی الاضلاع به طول ۳ واحد را تقسیم بندی کرده ایم. نشان دهید اگر ۱۰ نقطه دلخواه داخل این مثلث اختیار کنیم حداقل ۲ نقطه بین این نقاط وجود خواهد داشت به قسمی که فاصله آنها از یکدیگر کمتر از ۱ باشد . 
۱/۵ نمره	شهریور ۹۸	۵ ۱۳ نقطه درون یک مستطیل ۶×۸ قرار دارند. نشان دهید حداقل ۲ نقطه از این ۱۳ نقطه وجود دارند که فاصله‌ی آنها از هم ، کمتر از $\sqrt{۸}$ باشد.

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه استان خوزستان

پاسخ سئوالات موضوعی نهایی

فصل اول ریاضیات گسسته پایه دوازدهم ریاضی فیزیک

درس ۱: استدلال ریاضی

استدلال ریاضی

۱	درست
۲	با توجه به فرد بودن عدد ab نتیجه می گیریم هر دو عدد a و b فرد هستند، لذا با فرض صحیح بودن اعداد n و m ، می توان در نظر گرفت $a = 2n - 1$ و $b = 2m - 1$. بنابراین:
	$a^2 + b^2 = (2n - 1)^2 + (2m - 1)^2 = 4n^2 - 4n + 1 + 4m^2 - 4m + 1$ $= 2(2n^2 - 2n + 2m^2 - 2m + 1) = 2k \quad k \in Z$ <p>یعنی $a^2 + b^2$ یک عدد زوج است.</p>
۳	الف : درست ب : نادرست

اثبات با در نظر گرفتن همهی حالت ها

۱	
۲	

اثبات غیر مستقیم

۱	اگر $\alpha + 2\beta$ گنگ نباشد (فرض خلف) پس عددی گویا است. از طرفی طبق فرض $\alpha + \beta$ نیز عددی گویا است. می دانیم که تفاضل دو عدد گویا، عددی گویا است. در نتیجه :
	$(\alpha + 2\beta) - (\alpha + \beta) = \beta \in Q$ <p>اما با توجه به فرض مسئله β گنگ است. با توجه به تناقض ایجاد شده، فرض خلف باطل و حکم ثابت می شود.</p>

۲	<p>فرض کنید r یک عدد گویا و x یک عدد گنگ باشد. نشان می دهیم که $r + x$ یک عدد گنگ است. فرض کنید که $r + x$ گنگ نباشد (فرض خلف). بنابراین عددی گویا است. از طرفی می دانیم که تفاضل دو عدد گویا، گویا است. پس تفاضل $r + x$ و r باید عددی گویا باشد. یعنی $(r + x - r) \in Q$ و از آنجا $x \in Q$ که با فرض ما در تناقض است. در نتیجه فرض خلف باطل است و حکم ثابت می گردد.</p>
---	--

اثبات بازگشتی / گزاره های هم ارز

۱	$2x^2 + 2y^2 + 2 \geq 2xy + 2x + 2y$ $\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) + (x^2 - 2xy + y^2) \geq 0.$ $\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + (x-y)^2 \geq 0.$ <p>نامساوی بدست آمده بدیهی است. حال چون تمام مراحل بازگشت پذیر هستند، پس حکم مسئله درست است.</p>
۲	<p>اگر دو عدد نامنفی باشند، حکم چنین خواهد بود. $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$</p> $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab} \geq 0 \rightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0.$ <p>همواره درست</p> <p>حال چون تمام مراحل اثبات، بازگشت پذیر هستند، لذا حکم درست است.</p>
۳	$a + \frac{1}{a} \geq 2 \Leftrightarrow a^2 + 1 \geq 2a \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 \geq 0.$ <p>نامساوی بدست آمده بدیهی است. حال چون تمام مراحل بازگشت پذیر هستند، پس حکم مسئله درست است.</p>
۴	<p>ابتدا طرفین نامساوی را در ۲ ضرب می کنیم:</p> $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y \xrightarrow{\times 2} 2x^2 + 2y^2 + 2 \geq 2xy + 2x + 2y$ $\Leftrightarrow (x^2 - 2xy + y^2) + (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) \geq 0.$ $\Leftrightarrow (x-y)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 0.$ <p>همیشه درست</p> <p>نامساوی بدست آمده بدیهی است. حال چون تمام مراحل بازگشت پذیر هستند، پس حکم مسئله درست است.</p>

۵	ابتدا طرفین نامساوی را در ۲ ضرب می کنیم:
	$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz \xrightarrow{\times 2} 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 2xy + 2yz + 2xz$ $\Leftrightarrow (x^2 - 2xy + y^2) + (y^2 - 2yz + z^2) + (x^2 - 2xz + z^2) \geq 0$ $\Leftrightarrow (x - y)^2 + (y - z)^2 + (x - z)^2 \geq 0$ همیشه درست است.
	نامساوی بدست آمده بدیهی است. حال چون تمام مراحل بازگشت پذیر هستند، پس حکم مسئله درست است.

درس ۲: بخش پذیری در اعداد صحیح

عادکردن و ویژگی های آن

۱	$\begin{aligned} a 9k + 4 &\Rightarrow a 5(9k + 4) \Rightarrow a 45k + 20 \\ a 5k + 3 &\Rightarrow a 9(5k + 3) \Rightarrow a 45k + 27 \end{aligned} \rightarrow a (45k + 20) - (45k + 27)$ $\rightarrow a 7 \xrightarrow{a > 1} a = 7$
۲	$5 4k + 1 \rightarrow (5)^2 (4k + 1)^2 \rightarrow 25 16k^2 + 8k + 1 \quad (1)$ $5 4k + 1 \xrightarrow{\times 5} 25 20k + 5 \quad (2)$ $\xrightarrow{(1), (2)} 25 (16k^2 + 8k + 1) + (20k + 5) \rightarrow 25 16k^2 + 28k + 6$
۳	نادرست

بزرگترین مقسوم علیه مشترک و کوچکترین مضرب مشترک دو عدد

۱	درست
۲	۱۲
۳	گزینه‌ی د یعنی m^2 درست است.
۴	$\forall m > 0, a m, b m \Rightarrow c \leq m$

قضیهی تقسیم و کاربردها

۱	عدد a عددی فرد است. بنابراین $a + 2$ عددی فرد است و $a + 2 \mid b$. بنابراین b نیز عددی فرد خواهد بود. می دانیم که مربع هر عدد فرد، مضربی از ۸ بعلاوه یک است. پس:
۲	$a^2 + b^2 + 3 = (\lambda m + 1) + (\lambda n + 1) + 3 = \lambda(m + n) + 5 \rightarrow r = 5$ $\begin{cases} m = 13q_1 + 2 \\ n = 13q_2 + 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3m = 13(3q_1) + 6 \\ \Delta n = 13(\Delta q_2) + 45 \end{cases} \rightarrow \Delta n - 3m = 13q' + 39$ $\rightarrow \Delta n - 3m = 13q' + 3(13) \rightarrow \Delta n - 3m = 0 \rightarrow r = 0$
۳	باقیمانده ۸ و خارج قسمت -۹ است.
۴	$\begin{cases} a = 5q_1 + 2 \\ a = 6q_2 + 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 6a = 30q_1 + 12 \\ 5a = 30q_2 + 45 \end{cases} \rightarrow a = 30q - 3 \rightarrow a = 30r + 27$

افراز مجموعهی اعداد صحیح

۱	نادرست
۲	

درس ۳: بخش پذیری در اعداد صحیح و کاربرد ها

همنهشتی و ویژگی های آن

۱	$1 \dots \equiv 6 \xrightarrow{6 \equiv -1} 1 \dots \equiv -1 \rightarrow (1 \dots)^{13} \equiv (-1)^{13} \rightarrow (1 \dots)^{13} \equiv -1$ $\rightarrow (1 \dots)^{13} \times 12 \equiv -1 \times 12 \rightarrow (1 \dots)^{13} \times 12 \equiv -12$ $\rightarrow (1 \dots)^{13} \times 12 + 10 \equiv -12 + 10 \rightarrow (1 \dots)^{13} \times 12 + 10 \equiv -2$ $\rightarrow (1 \dots)^{13} \times 12 + 10 \equiv -2 + 7 \rightarrow (1 \dots)^{13} \times 12 + 10 \equiv 5 \rightarrow r = 5$
---	---

۲	روز اول مهر، شنبه را برابر صفر در نظر می گیریم. ۲۹ روز در مهر و سه ماه آبان و آذر و دی و ۱۲ روز بهمن، فاصله‌ی اول مهر تا ۱۲ بهمن است. که روی هم ۱۳۱ روز می شوند. حال باقی مانده‌ی تقسیم ۱۳۱ بر ۷ را تعیین می کنیم که برابر ۵ است. لذا ۱۲ بهمن متناظر با روز پنجشنبه است.														
	<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>شنبه</td> <td>یک شنبه</td> <td>دوشنبه</td> <td>سه شنبه</td> <td>چهارشنبه</td> <td>پنجشنبه</td> <td>جمعه</td> </tr> <tr> <td>۰</td> <td>۱</td> <td>۲</td> <td>۳</td> <td>۴</td> <td>۵</td> <td>۶</td> </tr> </table>	شنبه	یک شنبه	دوشنبه	سه شنبه	چهارشنبه	پنجشنبه	جمعه	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶
شنبه	یک شنبه	دوشنبه	سه شنبه	چهارشنبه	پنجشنبه	جمعه									
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶									
۳	الف : درست ب : درست														
۴	چهارشنبه														
۵	$۲۷ \equiv ۱ \rightarrow (۲۷)^{۱۳} \equiv (۱)^{۱۳} \rightarrow (۲۷)^{۱۳} + ۱۹ \equiv ۱ + ۱۹ \rightarrow (۲۷)^{۱۳} + ۱۹ \equiv ۲۰ \rightarrow (۲۷)^{۱۳} + ۱۹ \equiv ۷$														

معادله‌ی همنهشتی

۱	$۳x \equiv ۱۳ \rightarrow ۳x \equiv ۶ \xrightarrow{(۳,۷)=۱} x \equiv ۲ \rightarrow x = ۷k + ۲$
۲	$۴x \equiv ۱۷ \rightarrow ۴x \equiv ۱۵ + ۲ \rightarrow ۴x \equiv ۲ \rightarrow ۴x \equiv ۲ + ۱۰ \rightarrow ۴x \equiv ۱۲$ $\xrightarrow{(۴,۵)=۱} x \equiv ۳ \rightarrow x = ۵k + ۳$

معادله‌ی سیاله

۱	$\begin{aligned} ۵x + ۲y = ۱۸ &\rightarrow ۲y \equiv ۱۸ \xrightarrow{(۲,۵)=۱} y \equiv ۹ \rightarrow y \equiv ۵ + ۴ \rightarrow y \equiv ۴ \xrightarrow{k \in Z} y = ۵k + ۴ \\ ۵x + ۲y = ۱۸ &\xrightarrow{y=۵k+۴} ۵x + ۲(۵k + ۴) = ۱۸ \rightarrow x = -۲k + ۲ \end{aligned}$
۲	$\begin{aligned} ۷x \equiv ۱۱ &\rightarrow ۷x \equiv ۱۱ + ۲ \times ۵ \rightarrow ۷x \equiv ۲۱ \xrightarrow{(۷,۵)=۱} x \equiv ۳ \rightarrow x = ۵k + ۳ \quad k \in Z \\ ۷x + ۵y = ۱۱ &\xrightarrow{x=۵k+۳} ۷(۵k + ۳) + ۵y = ۱۱ \rightarrow y = -۷k - ۲ \quad k \in Z \end{aligned}$
۳	$۲x + ۵y = ۲۹ \rightarrow ۲x \equiv ۲۹ \rightarrow ۲x \equiv ۴ \rightarrow x = ۵k + ۲ \rightarrow y = ۵k + ۲$

تهیه کننده:

جابر عامری عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوّم متوسطه استان خوزستان

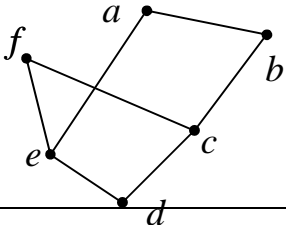
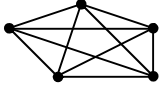
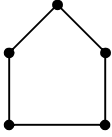
پاسخ سئوالات موضوعی نهایی

فصل دوم ریاضیات گسسته پایه دوازدهم ریاضی فیزیک

درس ۱: معرفی گراف

تعاریف و اثبات ها

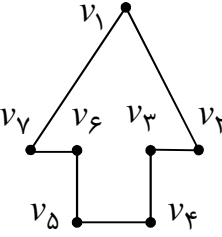
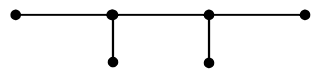
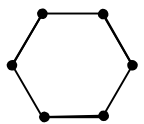
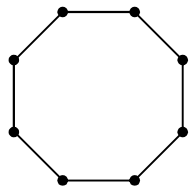
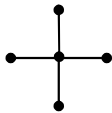
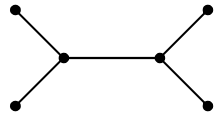
۱	الف : نادرست ب : درست
۲	الف : $abgc$ ب : $bcdgb$ پ : درجه‌ی رأس $\deg(a) = 5$ ت : خیر ، زیرا برای مثال از f به a مسیری وجود ندارد. ث :
۳	اگر مجموع درجات رئوس فرد در گراف $G = (V, E)$ را با A و مجموع درجات رئوس زوج را با B نشان دهیم، خواهیم داشت. $D = \sum_{i=1}^p \deg(v_i) = A + B$ بنابراینکه مجموع درجات رئوس یعنی D زوج است. از طرفی عدد B نیز زوج است (چون از مجموع تعدادی عدد زوج بدست می آید.) در نتیجه $A = D - B$ نیز یک عدد زوج می باشد و چون A مجموع تعدادی عدد فرد می باشد. لذا این تعداد باید زوج باشد، پس تعداد رئوس با درجه‌ی فرد، همیشه زوج است.
۴	الف : $N_G(d) = \{b, e\}$ ب : $q = 6$ ج : مجموع درجات رئوس $= 12$
۵	$q = \frac{p(p-1)}{2} \rightarrow \frac{p(p-1)}{2} = 36 \rightarrow p = 9 \rightarrow \Delta = \delta = p - 1 = 8$
۶	۲۸

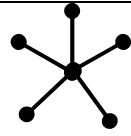
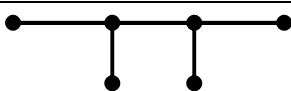
۷	الف: $p=6$ و $q=7$ ج: $N_G(b) = \{a, b, c\}$ ب: $N_G(b) = \{a, b, c\}$
۸	$\frac{p(p-1)}{2}$ لذا مجموع درجه های رئوس \bar{G} برابر ۱۶ است. $\bar{G} + 7 = \frac{6(6-1)}{2} + 7 = 15$ $\bar{G} + 7 = 8$
۹	الف: $V(G) = \{a, b, c, d, e\}$ و $E(G) = \{ab, ac, bc, bd, cd, de\}$ ب: $abca$ یا $bcd b$ ج: درجه‌ی رأس c در گراف مکمل ۳ خواهد بود.
۱۰	نادرست
۱۱	n رأسی
۱۲	الف:  ب: $N_G[b] = \{a, b, c\}$ ج: b, a, e, f, c, d
۱۳	الف:  ب: 

درس ۲: مدل سازی با گراف

احاطه گری

۱	الف: $\{b, e, h, k\}$ ب: $\{a, c, e, g, i, k\}$
۲	الف: ۳ رأس ب: $p-1$

 <p>الف: $\{v_1, v_3, v_4, v_5\}$ ب: $\gamma(G) = 3$ ج: $\{v_1, v_3, v_5\}$ و $\{v_2, v_4, v_6\}$</p>	۳
<p>الف: اگر $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ یک مجموعه‌ی احاطه‌گر غیر مینیمال باشد. در این صورت یک یا چند عضو وجود دارند که با حذف آنها مجموعه‌ی احاطه‌گر می‌نیمال باقی می‌ماند. بنابراین عضو a_1 را در نظر می‌گیریم. اگر با حذف آن هنوز مجموعه‌ی احاطه‌گر باقی بماند آن را حذف می‌کنیم، در غیر اینصورت آن را نگه داشته و همین کار را برای سایر رئوس انجام می‌دهیم.</p> <p>ب: $A = \{h, g, f, i, j\}$</p>	۴
<p>الف: </p> <p>ب: </p>	۵
<p>الف: درست ب: درست</p>	۶
<p>الف: </p> <p>ب: </p> <p>ج: </p>	۸
<p>$\Delta(G) = 4$</p> <p>حداکثر تعداد یالها $= \frac{n(n-1)}{2} = \frac{5(5-1)}{2} = 10$</p> <p>حداقل تعداد یالها $= n-1 = 5-1 = 4$</p>	۹
<p>الف: $\{f, d\}$ ب: $\{e, f, g, h\}$</p>	۱۰
<p>الف) زیر مجموعه‌ی D از مجموع رئوس گراف G را مجموعه‌ی احاطه‌گر می‌نامیم هرگاه هر رأس از گراف یا در D باشد و یا حداقل با یکی از رئوس موجود در D مجاور باشد.</p> <p>ب) تعداد اعضای مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیمم گراف G را عدد احاطه‌گری آن گراف گوییم.</p>	۱۱

الف) $\{c, f, h, j\}$	ب) $\{a, b, f, h\}$	پ) $\{c, f, h\}$	۱۲
<p>الف) $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{8}{3+1} \right\rceil = 2$</p> <p>از طرفی مجموعه‌ی $\{a, g\}$ یک مجموعه‌ی احاطه‌گری برای آن است. بنابراین $\gamma(G) = 2$ است و مجموعه‌ی $\{a, g\}$ همان ۲-مجموعه است.</p> <p>ب) $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{12}{3+1} \right\rceil = 3$</p> <p>از طرفی مجموعه‌ی $\{b, f, j, h\}$ یک مجموعه‌ی احاطه‌گری برای آن است. از طرفی با کمتر از ۴ رأس نمی‌توان رئوس گراف را احاطه کرد، بنابراین $\gamma(G) = 4$ است و مجموعه‌ی $\{b, f, j, h\}$ همان ۴-مجموعه است.</p>			۱۳
الف) 	ب) 		۱۴
الف):	ب): $\{a, d, g\}$	ج): $\{a, d, e, h\}$	۱۵
<p>یک مجموعه‌ی احاطه‌گر غیرمینیمال به صورت $\{a, h, f, b\}$ اکنون به حذف رأس a از آن، یک مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیمال به دست آید.</p>			۱۶

تهیه کننده:

جابر عامری عضو گروه ریاضی دوره ی دوّم متوسطه استان خوزستان

پاسخ سئوالات موضوعی نهایی

فصل سوم ریاضیات گسسته پایه دوازدهم ریاضی فیزیک

درس ۱: مباحثی در ترکیبیات

یادآوری و تکمیل

$\binom{4}{2} \times \binom{5}{3} \times 5! = 7200$	۱
الف) $5! \times 6!$ ب) $5! \times 7!$ ج) $10! \times 2!$	۲
$4! \times 2^4 = 24 \times 16 = 384$	۳
الف: $4! \times 6!$ ب: $5! \times 4!$ ج: $3! \times 7!$	۴

معادلات حسابی

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8 \quad x_i \geq 1, \quad i = 1, 2, 3, 4$ $\Rightarrow \binom{8-1}{4-1} = \binom{7}{3} = 35$	۱
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10$ $\xrightarrow{x_i \geq 1, \quad i=1,2,3,4} x_1 + y_2 + 1 + y_3 + 1 + y_4 + 1 + y_5 + 1 = 10$ $\rightarrow x_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 6 \rightarrow \binom{6+5-1}{5-1} = \binom{10}{4} = 210$ تعداد جواب های صحیح نامنفی	۲
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12$ $\xrightarrow{x_1 = y_1 + 3, \quad x_5 = y_5 + 4} y_1 + 3 + x_2 + x_3 + x_4 + y_5 + 4 = 12$ $\rightarrow y_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y_5 = 5 \rightarrow \binom{5+5-1}{5-1} = \binom{9}{4} = 126$ تعداد جواب های صحیح نامنفی	۳

۵ (الف)	$\binom{8+4-1}{4-1} = \binom{11}{3} = 165$ <p>(ب) ابتدا ۱ شاخه (به اجبار) از هر نوع گل بر می داریم. $8 - 4 = 4$ شاخه گل باقی مانده را به دلخواه از بین ۴ نوع گل انتخاب می کنیم. لذا تعداد حالات برابر است با:</p> $\binom{4+4-1}{4-1} = \binom{7}{3} = 35$
۶	$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 12$ $\rightarrow y_1 + 3 + x_2 + x_3 + x_4 + y_5 + 4 + x_6 = 12$ $\rightarrow y_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y_5 + x_6 = 5$ $\binom{5+6-1}{6-1} = \binom{10}{5} = 252$ <p>لذا تعداد حالات برابر است با:</p>

جایگشت های با تکرار

۱	$p = \frac{9!}{3! \times 2! \times 2!} = 3 \times 7!$
۲	<p>روش اول $\binom{9}{2,3,4} = \frac{9!}{2! \times 3! \times 4!} = 1260$</p> <p>روش دوم $\binom{9}{2} \times \binom{7}{3} \times \binom{4}{4} = \frac{9!}{2! \times 7!} \times \frac{7!}{3! \times 4!} \times \frac{4!}{4! \times 0!} = 36 \times 35 \times 1 = 1260$</p>
۳	۴

مربع های لاتین

۱	<table style="display: inline-table; border-collapse: collapse; margin-right: 20px;"> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱</td><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳</td><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳</td><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲</td><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲</td><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱</td><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳</td></tr> </table> <table style="display: inline-table; border-collapse: collapse; margin-right: 20px;"> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲</td><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱</td><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳</td><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲</td><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱</td><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳</td><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲</td></tr> </table> \Rightarrow <table style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱۲</td><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳۱</td><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲۳</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳۳</td><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲۲</td><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱۱</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۲۱</td><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۱۳</td><td style="border: 1px solid black; padding: 5px;">۳۲</td></tr> </table>	۱	۳	۲	۳	۲	۱	۲	۱	۳	۲	۱	۳	۳	۲	۱	۱	۳	۲	۱۲	۳۱	۲۳	۳۳	۲۲	۱۱	۲۱	۱۳	۳۲
۱	۳	۲																										
۳	۲	۱																										
۲	۱	۳																										
۲	۱	۳																										
۳	۲	۱																										
۱	۳	۲																										
۱۲	۳۱	۲۳																										
۳۳	۲۲	۱۱																										
۲۱	۱۳	۳۲																										
۲	۱۵																											

<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td></td><td>ش</td><td>ی</td><td>د</td></tr> <tr><td>A</td><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr> <tr><td>B</td><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> <tr><td>C</td><td>۲</td><td>۳</td><td>۱</td></tr> </table> <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td></td><td>ش</td><td>ی</td><td>د</td></tr> <tr><td>A</td><td>۲</td><td>۱</td><td>۳</td></tr> <tr><td>B</td><td>۱</td><td>۳</td><td>۲</td></tr> <tr><td>C</td><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr> </table> ➔ <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td></td><td>ش</td><td>ی</td><td>د</td></tr> <tr><td>A</td><td>۱۲</td><td>۲۱</td><td>۳۳</td></tr> <tr><td>B</td><td>۳۱</td><td>۱۳</td><td>۲۲</td></tr> <tr><td>C</td><td>۲۳</td><td>۳۲</td><td>۱۱</td></tr> </table> </div>		ش	ی	د	A	۱	۲	۳	B	۳	۱	۲	C	۲	۳	۱		ش	ی	د	A	۲	۱	۳	B	۱	۳	۲	C	۳	۲	۱		ش	ی	د	A	۱۲	۲۱	۳۳	B	۳۱	۱۳	۲۲	C	۲۳	۳۲	۱۱	۳
	ش	ی	د																																														
A	۱	۲	۳																																														
B	۳	۱	۲																																														
C	۲	۳	۱																																														
	ش	ی	د																																														
A	۲	۱	۳																																														
B	۱	۳	۲																																														
C	۳	۲	۱																																														
	ش	ی	د																																														
A	۱۲	۲۱	۳۳																																														
B	۳۱	۱۳	۲۲																																														
C	۲۳	۳۲	۱۱																																														
درست	۴																																																
<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۱</td></tr> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> </table> و <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>۱</td><td>۳</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۱</td><td>۳</td></tr> </table>	۲	۳	۱	۱	۲	۳	۳	۱	۲	۱	۳	۲	۳	۲	۱	۲	۱	۳	۵																														
۲	۳	۱																																															
۱	۲	۳																																															
۳	۱	۲																																															
۱	۳	۲																																															
۳	۲	۱																																															
۲	۱	۳																																															
<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>۴</td><td>۲</td><td>۱</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td><td>۴</td></tr> <tr><td>۱</td><td>۴</td><td>۳</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td><td>۱</td></tr> </table> <div style="text-align: center;"> $1 \rightarrow 3$ $2 \rightarrow 2$ $3 \rightarrow 4$ $4 \rightarrow 1$ </div> <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td></tr> <tr><td>۴</td><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۴</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۴</td><td>۱</td><td>۳</td></tr> </table> </div> <p style="text-align: center; margin-top: 10px;">در هیچ سطر یا ستونی از مربع جدید عضو تکراری وجود ندارد، بنابراین مربع جدید، مربع لاتین می باشد.</p>	۴	۲	۱	۳	۳	۱	۲	۴	۱	۴	۳	۲	۲	۳	۴	۱	۱	۲	۳	۴	۴	۳	۲	۱	۳	۱	۴	۲	۲	۴	۱	۳	۶																
۴	۲	۱	۳																																														
۳	۱	۲	۴																																														
۱	۴	۳	۲																																														
۲	۳	۴	۱																																														
۱	۲	۳	۴																																														
۴	۳	۲	۱																																														
۳	۱	۴	۲																																														
۲	۴	۱	۳																																														
<table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td></td><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td></tr> <tr><td>C_۱</td><td>T_۱</td><td>T_۲</td><td>T_۳</td><td>T_۴</td></tr> <tr><td>C_۲</td><td>T_۲</td><td>T_۱</td><td>T_۴</td><td>T_۳</td></tr> <tr><td>C_۳</td><td>T_۳</td><td>T_۴</td><td>T_۱</td><td>T_۲</td></tr> <tr><td>C_۴</td><td>T_۴</td><td>T_۳</td><td>T_۲</td><td>T_۱</td></tr> </table>		۱	۲	۳	۴	C _۱	T _۱	T _۲	T _۳	T _۴	C _۲	T _۲	T _۱	T _۴	T _۳	C _۳	T _۳	T _۴	T _۱	T _۲	C _۴	T _۴	T _۳	T _۲	T _۱	۷																							
	۱	۲	۳	۴																																													
C _۱	T _۱	T _۲	T _۳	T _۴																																													
C _۲	T _۲	T _۱	T _۴	T _۳																																													
C _۳	T _۳	T _۴	T _۱	T _۲																																													
C _۴	T _۴	T _۳	T _۲	T _۱																																													

این جدول یکی از پاسخ های ممکن است.

درس ۲: روش هایی برای شمارش

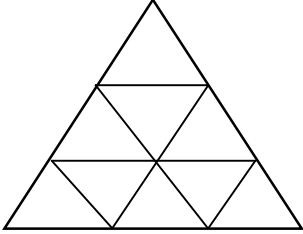
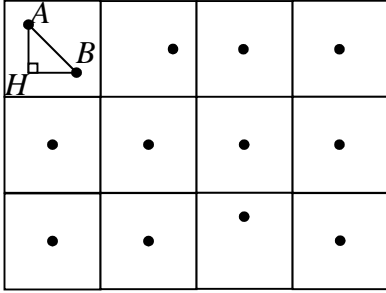
اصل شمول و عدم شمول

۱	<p>تعداد حالت های ممکن برای انجام این عمل معادل است با پیدا کردن تعداد تابع های پوشا از یک مجموعه ی ۴ عضوی مانند A به یک مجموعه ی ۳ عضوی مانند B</p> $A_i = \{f : A \rightarrow B \mid f(a_i) \neq b_i, i = 1, 2, 3, 4, j = 1, 2, 3\}$ $ S = B ^{ A } = 3^4 = 81$ $ A_1 = A_2 = A_3 = 2^4 = 16$ $ A_1 \cap A_2 = A_1 \cap A_3 = A_2 \cap A_3 = 1$ $ A_1 \cap A_2 \cap A_3 = 0$ $ \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} = \overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3} $ $= S - A_1 \cup A_2 \cup A_3 = 81 - (3 \times 16) + (3 \times 3) - 0 = 36$
۲	$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = \binom{90}{2} + \binom{90}{3} - \binom{90}{6}$ $= 45 + 30 - 15 = 60$
۳	$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = \binom{200}{4} + \binom{200}{3} - \binom{200}{12}$ $= 50 + 66 - 16 = 100$ $n(\overline{A \cup B}) = n(S) - n(A \cup B) = 200 - 100 = 100$
۴	<p>تعداد حالت های ممکن برای انجام این عمل، معادل است با پیدا کردن تعداد تابع های از یک مجموعه ی ۴ عضوی مانند A به یک مجموعه ی سه عضوی مانند B است. طوری که برد این توابع همه اعضای B باشند. (به هر عضو حداقل یک عضو از A نسبت داده شود.)</p> <p>پس جواب این مسئله می شود:</p> $ A = 4 \text{ و } B = 3$ $3^m - 3(2^m - 1) = 3^4 - 3(2^4 - 1) = 81 - 3(16 - 1) = 81 - 45 = 36$

۵	<p>مجموعه‌ی اعداد بخش پذیر بر ۴ را A و مجموعه‌ی اعداد بخش پذیر بر ۷ را B می نامیم. بنابراین:</p> $n(A) = \left[\frac{۴۰۰}{۴} \right] = ۱۰۰ \text{ و } n(B) = \left[\frac{۴۰۰}{۷} \right] = ۵۷ \text{ و } n(A \cap B) = \left[\frac{۴۰۰}{۴ \times ۷} \right] = ۱۴$ <p style="text-align: right;">(الف)</p> $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = ۱۰۰ - ۱۴ = ۸۶$ <p style="text-align: right;">(ب)</p> $n(A - B) + n(B - A) = n(A) - n(A \cap B) + n(B) - n(B \cap A)$ $= ۱۰۰ - ۱۴ + ۵۷ - ۱۴ = ۱۲۹$
۶	$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = \left[\frac{۳۵۰}{۴} \right] + \left[\frac{۳۵۰}{۶} \right] - \left[\frac{۳۵۰}{۱۲} \right]$ $= ۸۷ + ۵۸ - ۲۹ = ۱۱۶$ $n(\overline{A \cup B}) = n(S) - n(A \cup B) = ۳۵۰ - ۱۱۶ = ۲۳۴$

اصل لانه کبوتری

۱	$k + ۱ = ۲۰ \rightarrow k = ۱۹$ <div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="margin-right: 20px;"> $\begin{array}{r} ۶ \quad \quad ۴ \\ \hline ۴ \quad \quad ۱ \\ \hline ۲ \\ ۱+۱=۲ \end{array}$ </div> <div> <p>طبق تعمیم اصل لانه کبوتری، تعداد لانه‌ها همان روزهای سال می باشد.</p> <p style="text-align: right;">($n = ۳۶۵$)</p> <p>بنابراین تعداد کبوترها برابر است با $kn + ۱ = ۳۶۵ \times ۱۹ + ۱ = ۶۹۳۶$</p> </div> </div>
۲	<p style="text-align: center;">تعداد کبوتر ها : ۵۰۵ دانش آموز</p> <p style="text-align: center;">تعداد لانه ها : $۷ \times ۱۲ = ۸۴$</p> <div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="margin-right: 20px;"> $\begin{array}{r} ۵۰۵ \quad \quad ۸۴ \\ \hline ۵۰۴ \quad \quad ۶ \\ \hline ۱ \end{array}$ </div> <div> <p style="text-align: center;">$۶+۱=۷$</p> <p>طبق اصل لانه کبوتر لاقط ۷ نفر آنها در روز هفته و ماه تولدشان یکسان است.</p> </div> </div>
۳	<p>در این مسئله $k + ۱ = ۷$ یعنی $k = ۶$ است و تعداد لانه ها همان تعداد ماه های سال یعنی $n = ۱۲$ است.</p> <p>طبق اصل لانه کبوتری ، تعداد کبوتر ها یا معادل آن تعداد دانش آموزان، حداقل باید برابر $۷۳ = (۶ \times ۱۲) + ۱ = kn + ۱$ باشد.</p>

	<p>۴ مطابق شکل، مثلث را به ۹ مثلث متساوی الاضلاع (با ضلع هایی به طول ۱ واحد) تقسیم می کنیم.</p> <p>حال نقاط را به عنوان ۱۰ کبوتر و مثلث های کوچک را به عنوان ۹ لانه در نظر می گیریم. طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو کبوتر در یک لانه جای می گیرند، یعنی حداقل دو نقطه درون یک مثلث کوچک قرار خواهند گرفت. از طرفی با توجه به این که طول اضلاع مثلث ها ۱ واحد می باشد، فاصله ی بین دو نقطه ی درون مثلث از ۱ واحد کمتر است.</p>
<p>تعداد لانه ها : ۱۲ مربع مانند شکل زیر</p>  <p>تعداد کبوترها : ۱۳ نقطه</p>	<p>۵ طبق اصل لانه کبوتری دو نقطه مانند A و B در یک لانه جای می گیرند. پس :</p> $\begin{cases} AH < 2 \\ BH < 2 \end{cases} \rightarrow AH^2 + BH^2 < 8 \rightarrow AB^2 < 8 \rightarrow AB < \sqrt{8}$

تهیه کننده:

جابر عامری عضو گروه ریاضی دوره ی دوّم متوسطه استان خوزستان