تفاوت‌ها در تعاریف مفاهیم ریاضی (مقایسه نگرش‌های جدید و قدیم)

ناصر بروجردیان

تغییر در تعاریف ریاضی، یک ضرورت برای توسعه ریاضی است. تعاریف ریاضی به نوعی فقط نامگذاری مفاهیمی هستند که به آنها بسیار برخورد می‌کنیم و نقش برجسته‌ای در بیان حقایق ریاضی بازی می‌کنند. می‌توان گفت بینهایت مفهوم در ریاضی وجود دارد و بدیهی است که امکان ندارد که همه مفاهیم تعریف یا نامگذاری شوند. فقط برخی مفاهیم به دلایلی که بعداً خواهیم گفت، تعریف می‌شوند.

برای مثال، در هندسه، مثلث‌های متساوی‌الساقین را تعریف می‌کنیم، ولی آیا مثلث‌هایی که هیچ دو ضلع مساوی ندارند را هم تعریف می‌کنیم؟ اگر این مثلث‌ها خیلی برای ما جالب باشد بد نیست آنها را تحت عنوان مثلث‌های نامتقارن تعریف کنیم. آیا تا به حال دیده‌اید در هیچ کتاب ریاضی چنین تعریفی انجام شده باشد؟ مطمئناً نه. آیا چنین تعریفی اشکالی دارد تا ما نخواهیم از آن استفاده کنیم؟ مطمئناً نه. در تعریف مفاهیم و این که چه مفاهیمی را بخواهیم تعریف کنیم یا نکنیم هیچگونه سخت‌گیری در ریاضیات وجود ندارد و هر ریاضیدانی حق دارد هر مفهومی را بخواهد و به هر شکلی که بخواهد تعریف کند. تنها محدودیت آن است که تعریف، مشکل منطقی و ناسازگاری منطقی نداشته باشد و واقعاً چیزی تعریف شده باشد. از این بابت ریاضیات بسیار قابل انعطاف است و هیچ کس نباید گمان کند که تغییر در تعاریف، زیرپا گذاشتن ریاضیات است و هرگز نباید انجام شود. سخت‌گیری ریاضیات در استدلال بر اساس تعاریف انجام شده است. چگونگی تعاریف را سلیقه ریاضیدان‌ها و معیارهای دیگری تعیین می‌کند.

البته برای به دست آوردن یک زبان مشترک در ریاضی که ریاضیدان‌ها بتوانند بدون سوءتفاهم، اطلاعات خود را به یکدیگر منتقل کنند، لازم است تعاریف خود را با یکدیگر هماهنگ سازند و از تعاریف یکسانی برای مفاهیم استفاده کنند. این یک نیاز عملی است نه یک ضرورت منطقی. ریاضیدان‌ها با یکدیگر دعوا ندارند تا از سر لجبازی با یکدیگر هر کس بخواهد تعاریف و نمادهای خاص خود را بسازد.

اما از لحاظ تاریخی از این اتفاقات می‌افتد و به دلایل مختلف ممکن است یک حوزه از ریاضیات در کشورهای مختلف و مناطق مختلف با نمادگذاری‌ها و تعاریف مختلفی ارائه شود. مثلاً مفهوم مشتق توسط دو فرد مختلف (نیوتون و لایب‌نیتس) در دو منطقه مختلف با دو رویکرد متفاوت به وجود آمد. به همین دلیل، مفهوم مشتق در این دو رویکرد دو مفهوم متفاوت به نظر می‌رسید. نیوتون مشتق تابع $x(t)$ را با $\dot{x}(t)$ و لایب‌نیتز با $\frac{dx}{dt}$ نشان می‌داد و هر کدام معنای خاص خود را برای این نمادگذاری قائل بودند. در این تعاریف اصلاً مطرح نبود که نقطه مشتق‌گیری باید نقطهٔ میانی دامنهٔ تابع باشد و اگر نقطهٔ انتهایی باشد اسم آن را باید مشتق چپ یا راست بگذاریم. زیرا در آن موقع اصلاً مفهوم تابع وجود نداشت تا بخواهد این مسائل مطرح باشد. مفاهیم تابع و حد تابع همگی بعد از مفهوم مشتق و برای رفع معضلات منطقی تعریف مشتق به وجود آمدند. بدیهی است ایجاد این

مفاهیم از شکل اولیه آن تا شکل نهایی آن تغییرات بسیاری داشته است. تعاریف ریاضی از آسمان نازل نمی‌شوند و این ریاضیدانها هستند که این تعاریف را بر اساس برخی ملاک‌ها می‌سازند. ملاک تعاریف مفاهیم و تغییرات آنها به ترتیب اولویت عبارتند از:

- پرکاربرد بودن مفهوم و تکرار مفهوم در بخش‌های مختلف ریاضی
- همسان بودن تعریف با ایدهٔ شهودی مفهوم
- آسانتر بیان کردن قضایا و مطالب ریاضی توسط آن مفاهیم
- کلیت داشتن مفهوم در زمینه‌های گوناگون ریاضی

بنابراین، توسعه ریاضی که کلیت بخشیدن به مفاهیم ریاضی را در خود دارد و بیان دقیقتر و کاملتر قضایای ریاضی موجب می‌شوند در برخی تعاریف تغییراتی پدید آید. این تغییرات در زمینهٔ حد و پیوستگی وسیعتر بوده است. این مفاهیم در تعاریف اولیهٔ خود که کلکولس را در زمینهٔ توابع با متغیر اعداد حقیقی و مقادیر حقیقی ایجاد کرده‌اند، حوزهٔ مخصوص خود را ایجاد کرده است. اما قرار نیست ریاضیات تا ابد در این محدوده باقی بماند و گسترش این مفاهیم به توابع چندمتغیره با مقادیر چند متغیره و سپس به حوزه‌های فضاهای متریک و فضاهای توپولوژیک باعث شده است که اهمیت دامنهٔ تابع بیش از پیش آشکار شود و بی‌اهمیت بودن چپ و راست و بی-ارتباط بودن چپ و راست برای حدگیری مشخص شود. با اصلاحات به عمل آمده در تعریف حد و پیوستگی که مقداری این تعاریف را در حوزهٔ کلکولس تغییر می‌دهد امکان بیان بهتر و دقیقتر قضایا فراهم می‌شود که یکی از اهداف توسعهٔ ریاضی است.

ممکن است پرسیده شود آیا ضرورت منطقی برای تغییر در تعاریف کلکولس وجود دارد؟ همانطور که گفتم هیچ مشکل منطقی برای پایبندی به تعاریف قبلی وجود ندارد ولی برای چه باید به تعاریف قدیم پایبند باشیم؟ ریاضیدان‌ها زحمت کشیده‌اند تا با این تغییرات تعاریف بهتر و کلی‌تری را عرضه کنند و برای داشتن زبان واحد در همهٔ عرصه‌های ریاضی ما باید همگام با جامعهٔ جهانی ریاضی باشیم. این مانند است که بگوییم آیا حتماً لازم است با مازرتی سر کار برویم، نمی‌شود با همان پیکان سر کار برویم؟ بله می‌شود اما اگر قرار است عضوی از جامعهٔ ریاضی جهانی باشیم باید با زبان آنها صحبت کنیم.

البته برخی فکر می‌کنند زبان جامعهٔ جهانی ریاضی همان تعاریف قدیم است و این تعاریف جدید است که خلاف آن است. دلیل آنها نیز همان کتاب‌های کلکولس جهانی است که با همان تعاریف قدیم کار می‌کنند. ظاهراً کلکولس، حوزه‌ای از ریاضیات است که تافته جدابافته است و هیچ نیازی ندارد خودش را با سایر حوزه‌های ریاضی هماهنگ سازد و کسانی که تمام اطلاعاتشان از حد و پیوستگی در محدودهٔ کتاب‌های کلکولس است گمان می-برند که تمام دنیای ریاضی در همین حوزه است. ریاضیات یک حوزهٔ واحد است و نمی‌توان در آن حکومت‌های محلی تشکیل داد که مستقل از حکومت مرکزی عمل کند.

البته کتاب‌های کلکولس جهانی هم در حال تغییر کردن است و بتدریج برای همگون‌سازی حوزه‌های مختلف ریاضی در سطح کلکولس و آنالیز تغییرات در حال رخ دادن است. مثلاً در کتاب قدیمی کلکولس توماس صریحاً گفته می‌شود تابع $\frac{1}{x}$ در صفر ناپیوسته است، اما در کتاب جدیدتر آدامز صریحاً گفته می‌شود تابع $\frac{1}{x}$ پیوسته است و به کتاب توماس هم اشاره می‌کند که در قدیم برخی نویسندگان ترجیح می‌دادند این تابع را ناپیوسته بگیرند. تعاریف پیوستگی کتاب آدامز کاملاً منطبق بر تعاریف جدید است و خلاف کتاب‌های قدیمی‌تر است. در اینجا باید از کسانی که خود را مطیع کتاب‌های کلکولسی می‌دانند و کتاب‌های کلکولسی را مرجع درک و فهم ریاضی می‌دانند، پرسید: تکلیف ما با پیوستگی چیست و از کدام کتاب باید تبعیت کنیم؟

در زیر فهرستی از مواردی که تعاریف و تاکیدها در قدیم و جدید فرق می‌کند آورده شده است تا معلمان بتوانند درک بهتری از این تغییرات و نتایج آن داشته باشند.

جدول تفاوت‌های تعاریف قدیم و جدید

مفهوم	قدیم	جدید
تعریف تابع و شناسایی تابع	درک اولیه از تابع از طریق فرمول و قانون تابع بوده است و فرمول تابع هویت و معنای تابع را در خود جا می‌داده است. این حالت در کتاب‌های کلکولسی پابرجا شده است و در اشاره به یک تابع معمولاً به فرمول آن اشاره می‌شود. البته در آموزش‌های جدید از تابع به اهمیت دامنه اشاره شده است ولی در عمل، پس از آموزش تابع در کار عملی با تابع ما شاهد آن هستیم که فرمول تابع به تنهایی وضعیت تابع را مشخص می‌کند. عموماً این قرارداد هم می‌شود که اگر دامنهٔ هر تابع ذکر نشود، دامنهٔ تابع بزرگترین زیرمجموعهٔ ممکن است که فرمول تابع اعتبار دارد. از آنجا که در همهٔ مثال‌ها و عموماً در همین وضعیت قرار داریم، به تدریج این بدفهمی در ذهن معلم و دانش‌آموز شکل می‌گیرد که تابع همان فرمول تابع است و حتی دامنهٔ تابع از روی فرمول آن تعیین می‌شود.	در تعاریف جدید، تابع به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب است که دارای ویژگی‌های خاصی است. البته کتاب‌های جدید ما نیز بر همین اساس تعریف تابع را انجام می‌دهند و نمی‌توان گفت تعریف کتاب‌های ما قدیمی است. اما در عمل این مباحث اولیه که به پایان می‌رسد و به کاربرد عملی تابع در بحث‌های جدی که می‌رسیم همان نگرش قدیم مجدد حاکم می‌شود و آن آموزش اولیه کنار می‌رود. اما شیوهٔ آموزش تابع با زوج‌های مرتب از چند نظر مشکل‌آفرین است. اولاً این شیوهٔ تعریف، مخصوص ریاضیدان‌ها است که می‌خواهند با کمترین حرف و با بیشترین دقت، مفهوم مورد نظر خود را تعریف کنند، بنابراین لزوماً این تعریف مناسب آموزش اولیهٔ تابع نیست. ثانیاً با این روش به دو عنصر اساسی تابع که دامنه و قانون آن باشد به درستی پرداخته نمی‌شود و نهایتاً در عمل وقتی دانش‌آموز با مفهوم تابع کار می‌کند همان فرمول تابع را می‌بیند و بس. بنابراین، کتاب‌های ما همچنان دچار مشکل فهم درست از تابع است. مهمترین عنصر در فهم تابع آن است که یک تابع در درجهٔ اول، با دامنهٔ خود مشخص می‌شود که شخص ارائه کنندهٔ تابع باید به هر شکلی که می‌خواهد آن را معرفی کند و در درجهٔ دوم، قانون تابع باید ارائه شود تا ارائه تابع کامل شود.

		هیچ تابعی فقط با فرمول خود مشخص نمی‌شود. (البته مقصد تابع یا مقادیر تابع نیز مهم است ولی چون در اینجا فقط در بارهٔ توابع با مقادیر حقیقی صحبت خواهیم کرد، نیازی نیست به آن اشاره کنیم.)
تحدید تابع	مفهوم تحدید تابع در تعاریف قدیم تابع چندان مطرح نمی‌شود. زیرا هر تابعی با فرمول خود مشخص می‌شود و دامنهٔ آن نیز از طریق فرمول مشخص است و معمولاً پیش نمی‌آید تا بخواهیم دامنهٔ تابع را کوچکتر کنیم. بنابراین از این واژه در کتاب‌های ما هیچ استفاده مهمی نشده است.	تحدید یک تابع از مفاهیم بسیار اساسی در تعریف جدید تابع است. زیرا، در تعریف جدید، دامنه، بخشی از تعریف تابع است و با کوچکتر کردن دامنهٔ یک تابع می‌توان توابع جدیدتری ساخت. تابع‌های تحدید یافته با تابع اصلی تفاوت‌های بسیاری دارند. اما در نگرش قدیم چون تابع صرفا با فرمولش فهمیده می‌شد، ناخودآگاه فرض می‌کردند تحدید یک تابع تغییر مهمی در تابع اصلی ایجاد نمی‌کند. اما تابع‌های تحدید یافته می‌توانند خواصی کاملا متفاوت با تابع اصلی داشته باشند. در تعاریف جدید، تحدید کردن یک تابع و ساختن تابع جدید بسیار مرسوم و شایع است.
اعمال جبری روی تابع‌ها	جمع و تفریق و ضرب و تقسیم تابع‌ها از اعمال مهم روی تابع‌ها است. در فهم قدیم از تابع که تابع صرفاً یک فرمول است، این فرمول‌ها هستند که با هم جمع و تفریق و ضرب و تقسیم می‌شوند. بعد از این محاسبه به این فکر افتاده می‌شود که دامنهٔ اعتبار این فرمول‌های جدید کجاست؟ یعنی دامنهٔ تابع‌های به دست آمده چیست؟ مثلاً گفته می‌شود دامنهٔ تابع‌های $f(x) \pm g(x)$ و $f(x)g(x)$ عبارت است از $D_f \cap \mathrm{D}_g$ و دامنهٔ تابع $\frac{f(x)}{\mathrm{g(x)}}$ همان $D_f \cap \mathrm{D}_g$ است که جاهایی که $g(x)$ صفر است را از آن حذف کنیم. البته پیش می‌آید که فرمول تابع‌های جدید به دست آمده، دامنهٔ اعتبار بزرگتری داشته باشند ولی در اینجا به ناچار باید گفته شود دامنهٔ تابع به دست آمده را باید کوچکتر از دامنهٔ اعتبار فرمول در نظر گرفت.	در تعاریف جدید اعمال جبری روی تابع‌ها، حتماً از ابتدا فرض می‌کنیم یا شرط می‌کنیم دامنهٔ تابع‌ها یکسان باشند. توابعی که دامنهٔ یکسان ندارند با یکدیگر جمع و تفریق و ضرب و تقسیم نمی‌کنیم. در تقسیم دو تابع علاوه بر یکسانی دو تابع، فرض می‌کنیم تابع مخرج (در دامنه‌ای که برای آن در نظر گرفته‌ایم) هیچگاه صفر نشود. یک دلیل برای چنین شیوه‌ای از تعریف جمع و ضرب تابع‌ها آن است که دامنهٔ یک تابع نقش اصلی را در تعریف تابع بازی می‌کند. وقتی دامنه‌ها یکسان است، از ابتدا معلوم است که تابع جدید ساخته شده چه دامنه‌ای دارد و سپس قانون آن با جمع و تفریق یا ضرب قانون‌ها ساخته می‌شود. برای تقسیم دو تابع نیز شرایط گذاشته شده، نشان می‌دهد که دامنهٔ تابع تقسیم چیست و بعد قانون آن را به دست می‌آوریم. ظاهراً این فرضیات محدود کننده است و تعاریف قبلی کلیت بیشتری دارند، اما چنین نیست و این تعریف هیچ چیزی کمتر از تعریف قبلی ندارد و در عوض روشنگری‌های زیادی را در خود دارد. دو تابع با دامنه‌های متفاوت اصولاً موجودات متفاوتی هستند و جمع و ضرب آنها معنای به درد بخوری ندارد.

		عملاً برای جمع دو تابع با روش قدیم می‌توانید ابتدا آنها را روی یک دامنهٔ مشترک تحدید کنید و سپس با روش جدید جمع کنید. نتیجه هیچ فرقی نمی‌کند. بنابراین روش جدید محدودیتی ایجاد نکرده است که با روش قدیم بتوان دو تابع را جمع و ضرب کرد، اما با روش جدید نتوان. اما روش جدید یک روشنگری مهم در خود دارد. روش جدید نشان می‌دهد که در جمع و ضرب دو تابع با روش قدیم، عملاً این توابع تحدید یافته هستند که با هم جمع و ضرب می‌شوند و نه آن تابع‌های اصلی. خواص تابع تحدید یافته می‌تواند با خواص تابع اصلی بسیار متفاوت باشد. اگر به خواص جمع یا ضرب دو تابع دقت داریم باید متوجه باشیم آن توابع تحدید یافته چه خواصی دارند زیرا خواص تابع اصلی ممکن است هیچ ارتباطی با خواص تابع تحدید یافته نداشته باشد.
ترکیب تابع‌ها	مشکلات ترکیب تابع‌ها همانند مشکلات جمع و تفریق تابع‌ها است. در اینجا هم فرمول‌های دو تابع با هم ترکیب می‌شوند تا تابع مرکب ساخته شود. مثلاً برای دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ ترکیب $f(g(x))$ را تشکیل می‌دهیم که تابع جدیدی است. پس از ترکیب دو فرمول است که دامنهٔ اعتبار آن مطرح می‌شود که گفته می‌شود x باید در دامنهٔ g باشد و بعد $g(x)$ نیز در دامنهٔ f باشد. بنابراین نقاطی از دامنهٔ g را که این ویژگی را ندارند حذف می‌کنیم تا دامنهٔ تابع مرکب به دست آید.	در اینجا نیز از ابتدا فرض می‌کنیم یا شرط می‌گذاریم که مقادیر تابع داخل دامنهٔ باشند و سپس تابع جدیدی معرفی می‌کنیم که دامنهٔ آن همان دامنهٔ تابع است و قانون آن به صورت $f(g(x))$ است. این تعریف نیز هیچگونه محدودیتی اضافه بر محدودیت‌های تعریف قبلی در خود ندارد. در تعریف قبلی هم در عمل ابتدا دامنهٔ تابع g کوچکتر می‌شود تا این شرایط برقرار گردند و بعد ترکیب انجام می‌شود و نتیجه هر دو یکی است. با این تفاوت مهم که مشخص است ترکیب دو تابع، با آن تابع اصلی g انجام نشده است بلکه ترکیب با یک تابع تحدید شده از g انجام شده است.
حد تابع	در کتاب‌های کلکولسی اصرار فراوانی دیده می‌شود که نقطهٔ حدگیری باید یک نقطهٔ میانی دامنهٔ تابع باشد و برای حدگیری باید بتوان از دو طرف به نقطهٔ حدگیری نزدیک شد. در حالت‌هایی که فقط از چپ به نقطهٔ حدگیری نزدیک شویم آن را حد چپ می‌نامند و اگر فقط از راست به نقطهٔ حدگیری نزدیک شویم آن را حد راست می‌نامند. حد یک تابع در یک نقطه، فقط در حالتی وجود	در توسعهٔ مفهوم حد به حد توابع چندمتغیره و حد توابع روی فضاهای متریک و توپولوژیک، مشاهده می‌شود، کلیدی‌ترین وضعیت برای حدگیری یک تابع در یک نقطه، فقط امکان نزدیک شدن به نقطهٔ حدگیری از داخل دامنهٔ تابع است. در فضاهای کلی‌تر، چپ و راست و نقطهٔ میانی بودن نسبت به دامنهٔ تابع معنایی ندارند و این مفاهیم فقط در فضای اعداد حقیقی قابل بیان است. خاص بودن این مفاهیم در فضای اعداد حقیقی نشان می‌دهد که این مفاهیم نمی‌توانند نقش کلیدی در تعریف مفهوم حد بازی

	دارد که آن نقطه، نقطهٔ میانی دامنهٔ تابع باشد و حد چپ و راست در آن نقطه موجود و مساوی باشند. در غیر این صورت گفته می‌شود حد در آن نقطه وجود ندارد.	کنند، زیرا در فضاهای کلی‌تر چنین مفاهیمی وجود ندارند. اگر مفهوم توسعه‌یافته حد را بخواهیم در فضای اعداد حقیقی پیاده کنیم، کاری به چپ و راست و از دو طرف نزدیک شدن به نقطهٔ حدگیری نداریم. اگر بتوان از داخل دامنهٔ یک تابع به نقطه‌ای نزدیک شد، پس می‌توانیم از حدگیری تابع در آن نقطه صحبت کنیم و با برقرار شدن شرایطی از حد تابع در آن نقطه صحبت کنیم. بنابراین اگر دامنهٔ تابع به گونه‌ای باشد که فقط از یک طرف بتوان به آن نقطه نزدیک شد، باز هم آن را به عنوان حد تابع تعریف می‌کنیم. البته این شیوهٔ تعریف حد بسیار کلی است و در کتاب‌های درسی به این حالت بسیار کلی نمی‌پردازند. اگر در کتاب‌های درسی فقط به توابعی بپردازیم که دامنهٔ آنها اجتماعی از چند بازه است، تنها حالت جدیدی که برای حدگیری پیش می‌آید، نقاط انتهایی این بازه‌ها است که در تعاریف قدیم به عنوان حد چپ یا حد راست قابل قبول بود، ولی در تعریف جدید به عنوان حد تابع قابل قبول است. بنابراین، اگر خودمان را به این گونه تابع‌ها محدود کنیم تنها تفاوت در این است که حد در نقاط انتهایی را نه به عنوان حد چپ یا راست بلکه به عنوان حد تابع به رسمیت بشناسیم و اصراری نداشته باشیم که حد فقط باید در نقاط میانی دامنهٔ تابع باشد. البته آن قضیه کذایی وجود حد معادل وجود حد چپ و راست و تساوی آنها است را باید تغییر مختصری بدهیم و بگوییم وجود حد در نقاط میانی معادل وجود حد چپ و راست در آن نقاط و تساوی حدهای چپ و راست است.در توسعهٔ مفهوم حد به حد توابع چندمتغیره و حد توابع روی فضاهای متریک و توپولوژیک، مشاهده می‌شود، کلیدی‌ترین وضعیت برای حدگیری یک تابع در یک نقطه، فقط امکان نزدیک شدن به نقطهٔ حدگیری از داخل دامنهٔ تابع است. در فضاهای کلی‌تر، چپ و راست و نقطهٔ میانی بودن نسبت به دامنهٔ تابع معنایی ندارند و این مفاهیم فقط در فضای اعداد حقیقی قابل بیان است. خاص بودن این مفاهیم در فضای اعداد حقیقی نشان می‌دهد که این مفاهیم نمی‌توانند نقش کلیدی در تعریف مفهوم حد بازی کنند، زیرا در فضاهای کلی‌تر چنین مفاهیمی وجود ندارند.

		اگر مفهوم توسعه‌یافته حد را بخواهیم در فضای اعداد حقیقی پیاده کنیم، کاری به چپ و راست و از دو طرف نزدیک شدن به نقطهٔ حدگیری نداریم. اگر بتوان از داخل دامنهٔ یک تابع به نقطه‌ای نزدیک شد، پس می‌توانیم از حدگیری تابع در آن نقطه صحبت کنیم و با برقرار شدن شرایطی از حد تابع در آن نقطه صحبت کنیم. بنابراین اگر دامنهٔ تابع به گونه‌ای باشد که فقط از یک طرف بتوان به آن نقطه نزدیک شد، باز هم آن را به عنوان حد تابع تعریف می‌کنیم. البته این شیوهٔ تعریف حد بسیار کلی است و در کتاب‌های درسی به این حالت بسیار کلی نمی‌پردازند. اگر در کتاب-های درسی فقط به توابعی بپردازیم که دامنهٔ آنها اجتماعی از چند بازه است، تنها حالت جدیدی که برای حدگیری پیش می‌آید، نقاط انتهایی این بازه‌ها است که در تعاریف قدیم به عنوان حد چپ یا حد راست قابل قبول بود، ولی در تعریف جدید به عنوان حد تابع قابل قبول است. بنابراین، اگر خودمان را به این گونه تابع‌ها محدود کنیم تنها تفاوت در این است که حد در نقاط انتهایی را نه به عنوان حد چپ یا راست بلکه به عنوان حد تابع به رسمیت بشناسیم و اصراری نداشته باشیم که حد فقط باید در نقاط میانی دامنهٔ تابع باشد. البته آن قضیه کذایی وجود حد معادل وجود حد چپ و راست و تساوی آنها است را باید تغییر مختصری بدهیم و بگوییم وجود حد در نقاط میانی معادل وجود حد چپ و راست در آن نقاط و تساوی حدهای چپ و راست است.
حد چپ و راست تابع‌ها	در تعریف قدیم حد، نقطهٔ حدگیری همواره نقطهٔ میانی دامنهٔ تابع است. پس همواره از حدگیری چپ و راست می‌توان صحبت کرد که با نماد خاص خود بیان می‌شود.	در تعریف جدید حد، نقطهٔ حدگیری می‌تواند نقطهٔ انتهایی دامنهٔ تابع باشد و در این حالت حدگیری یا از چپ یا از راست خواهد بود که همان حد تابع محسوب می‌شود. در این حالت اصطلاح حد چپ و راست کاربردی ندارد و همان اصطلاح حد تابع به کار برده می‌شود. اما اگر نقطهٔ حدگیری نقطهٔ میانی دامنهٔ تابع باشد، می‌توانیم حد چپ و حد راست را جداگانه مطرح کنیم و اصطلاحات حد چپ و راست و نمادگذاری خاص آنها را به کار بریم. بنابراین در تعریف جدید باز هم از اصطلاحات حد چپ و حد راست و نمادگذاری آنها استفاده می‌شود ولی این مفاهیم فقط برای حدگیری در نقطهٔ میانی است و نه نقاط انتهایی دامنهٔ تابع.

قضایای حد تابع	قضایای حد مجموع و حاصلضرب و تقسیم دو تابع و قضیه ساندویچ را می‌توان بدون هیچ مشکلی در تعاریف قدیم از حد تابع‌ها به کار برد. زیرا در تعریف حدگیری، نقاط حدگیری باید نقطهٔ میانی دامنهٔ تابع‌ها باشند و خود به خود این تابع‌ها در یک همسایگی مشترک از نقطهٔ حدگیری تعریف شده‌اند و امکان جمع و ضرب و تقسیم آنها وجود دارد. به همین دلیل، با اعمال جمع و ضرب و تقسیم تابع‌ها (بدون یکسان بودن دامنهٔ تابع‌ها) مشکلی برای این قضایا به وجود نمی‌آید.	قضایای حد مجموع و حاصلضرب و تقسیم و سایر قضایای حدگیری در تعاریف جدید حد نیز به شکلی قویتر برقرارند. فقط باید به این نکته توجه داشت که توابعی که در این قضایا از آنها بحث می‌شود همگی باید دامنهٔ یکسانی داشته باشند و عملیات جبری بین توابع فقط روی توابع با دامنهٔ یکسان انجام می‌شود. ممکن است برخی فکر کنند که این یک نقطهٔ ضعف برای این تعاریف است که برای درستی قضایای حدگیری ناچاریم چنین سخت‌گیرانه عمل کنیم در حالی که در قضایای حدگیری تعریف قدیم حد احتیاج به هیچگونه از این سخت‌گیری‌ها نبود. چنین برداشتی بسیار خام و مبتدیانه است. برای قضاوت در میزان قدرت و توانمندی قضایا باید دید کدام قضایا قضایای دیگر را نتیجه می‌دهند و کدام قضایا نمی‌توانند قضایای دیگر را نتیجه بدهند. این گونه است که می‌توان تشخیص داد کدام قضایا قویترند. قضایای حدگیری قدیم نمی‌توانند قضایای حدگیری جدید را نتیجه بدهند زیرا حد جدید شامل حالت‌هایی است که حد قدیم آن را نمی‌شناسد. اما قضایای حد جدید، قضایای حد قدیم را نتیجه می‌دهند، زیرا تابع‌های آن قضایا را می‌توان روی دامنهٔ یکسان تحدید کرد و سپس از قضایای حد جدید برای نتیجه‌گیری استفاده کرد. قضایای حد جدید نکات جدیدتر و اضافه‌تر دیگری هم می‌گویند که در تعریف قدیم حد باید مجدد تحت عنوان جدید بیان شوند.
پیوستگی و ناپیوستگی	در تعریف پیوستگی قدیم ایدهٔ شهودی پیوستگی به عنوان نداشتن بریدگی در نمودار تابع حرف اصلی را می‌زند و مهم نیست دلیل این بریدگی چه باشد. مثلاً نبود یک نقطه در دامنهٔ تابع موجب بریدگی نمودار تابع در آن نقطه می‌شود، پس تابع را در نقاط خارج از دامنهٔ تابع ناپیوسته می‌نامند. وجود حد تابع در یک نقطه نیز از ضروریات پیوستگی در آن نقطه است، بنابراین در نقاط انتهایی دامنه که گفته می‌شود حد وجود ندارد، تابع ناپیوسته است. به طور سه شرط برای پیوستگی تابع در یک نقطه مطرح است. (۱) نقطه از نقاط میانی دامنه تابع باشد. (۲) حد تابع در آن نقطه	در تعریف جدید پیوستگی که ناشی از توسعهٔ مفهوم پیوستگی در فضاهای کلی‌تر است، در چارچوب تابع‌هایی که دامنهٔ به صورت اجتماع چند بازه دارند، همچنان به صورت تساوی حد تابع با مقدار تابع است. اما تفاوتی که ایجاد می‌شود آن است که حدگیری در نقاط انتهایی دامنه نیز مجاز است و توابع می‌توانند در نقاط انتهایی دامنهٔ خود پیوسته باشند. همچنین پیوستگی و ناپیوستگی یک تابع فقط در نقاط دامنهٔ تابع قابل طرح است و برای نقاط خارج از دامنه، حرفی از پیوستگی و ناپیوستگی گفته نمی‌شود. بنابراین نقاط خارج از دامنه نقاط ناپیوستگی محسوب نمی‌شوند، هرچند ممکن است برخی از این نقاط موجب بریدگی نمودار تابع شده باشند. عملاً ایدهٔ شهودی پیوستگی تا

	موجود باشد. (۳) حد تابع ر آن نفطه با مقدار تابع در آن نقطه مساوی باشد. اگر نقطه‌ای یکی از این سه شرط را نسبت به یک تابع نداشته باشد، تابع در آن نقطه ناپیوسته است. با این شیوهٔ تعریف، هر تابعی نسبت به هر نقطه‌ای یا در وضعیت پیوسته است یا در وضعیت ناپیوسته. مهمترین مشکل این تعریف آن است که با ایدهٔ شهودی پیوستگی فاصله گرفته است. با این تعریف حرفهایی باید بزنیم که کاملا بی-معنا هستن. مثلاً باید بگوییم تابع $\sqrt{x}$ در عدد ۱- ناپیوسته است!! این نقطه از دامنهٔ تابع دور است و هیچ حرفی و ویژگی از این تابع نسبت به این نقطه وجود ندارد. همچنین باید بگوییم این تابع در صفر ناپیوسته است!! مگر صفر بریدگی در نمودار تابع ایجاد کرده است؟ پیوستگی یا ناپیوستگی تابع در یک نقطه هر دو مربوط به چگونگی رفتار تابع در آن نقطه است. پس تابع باید یک همسایگی آن نقطه تعریف شده باشد تا بخواهیم از پیوستگی یا ناپیوستگی تابع در آن نقطه صحبت کنیم. علت این ناهماهنگی‌ها آن است که مولفین این گونه کتاب‌ها چه در داخل و چه در سطح جهانی دقت منطقی کمی دارند و با اصول و قواعد بیان یک تعریف آشنایی ندارند و نهایتاً تعاریف را به گونه‌ای عرضه می‌کنند که نتایجی خلاف انتظار در آن است. البته خودشان هیچگاه مثال‌هایی را طرح نمی‌کنند که نشان‌دهنده وضعیت ناجور تعریف آنها باشد و همواره مثال‌هایی را طرح می‌کنند که چندان بد نباشد. مثلاً آنها هیچگاه از ناپیوستگی یک تابع در یک نقطهٔ دور از دامنهٔ تابع صحبت نمی‌کنند.	جایی اعتبار دارد که دامنهٔ تابع یک بازه باشد. اگر دامنهٔ تابع چند تکه باشد خود به خود نمودار تابع نیز چند تکه است و دلیل این بریدگی‌ها دامنهٔ تابع است نه رفتار تابع. تعاریف جدید و قدیم پیوستگی کاملا مشابه یکدیگرند ولی به دلیل بیان منطقی متفاوت آنها نتایج آنها با یکدیگر فرق می‌کنند. بحث مفصل‌تر در باره اصول و قواعد تعاریف در ریاضی و چگونگی استفاده از آنها بعد از جدول آمده است.

اصول و قواعد تعاریف در ریاضی:

تعریف مفاهیم در ریاضی بیشتر به معنای نامگذاری یک مفهوم شناخته شده است تا بتوانیم به آن مفهوم اشاره کنیم و از آن در صحبت کردن استفاده کنیم. واژه «تعریف» به معنای ایجاد یا شناساندن یک شیئ جدید هم به کار می‌رود که ارتباطی با تعریف مفهوم ندارد. مثلا وقتی تابعی را برای منظور خاصی ارائه می‌کنیم معمولا می-گوییم تابع فلان را به شکل زیر تعریف می‌کنیم. این تعریف کردن اشیاء ارتباطی با تعریف مفاهیم ریاضی ندارد.

در هر تعریف ریاضی از میان دسته‌ای از اشیاء مشخص شده، تعدادی از آنها را با ویژگی‌های مشخص شده انتخاب می‌کنیم و آنها را با یک نام جدید نامگذاری می‌کنیم. مثلاً در تعریف مثلث‌های متساوی‌الساقین گوییم:

مثلث‌هایی که دو ضلع مساوی دارند مثلث متساوی‌الساقین می‌نامیم.

در اینجا از میان همهٔ مثلث‌های ممکن، تعدادی از آنها را با ویژگی تساوی دو ضلع جدا کرده‌ایم و آنها را با نام جدید متساوی‌الساقین نامگذاری کرده‌ایم. اگر دانش‌آموزی بگوید من فکر می‌کنم مربع‌ها هم متساوی‌الساقین هستند (چون دو ضلع مساوی دارند) یا بگوید بابای من هم متساوی‌الساقین است (چون ساقهای او هم مساوی است)، چه جوابی به او باید داد؟ آیا باید بگوییم حرف شما نادرست است؟ یا باید بگوییم شما متوجه تعریف نشده‌اید. این تعریف برای مثلث‌ها است و نباید برای اشیایی که مثلث نیستند به کار برده شود. اگر این اصطلاح را برای غیرمثلث‌ها به کار بریم عباراتی بی‌معنا ساخته‌ایم که نه درست هستند و نه نادرست زیرا اصلاً گزاره و جمله خبری نیستند تا بخواهند درست یا نادرست باشند.

این یک نکته اساسی و مهم است که هر تعریفی، حوزه و دامنه خاص خود را دارد که تعریف کنندگان باید به صراحت آن را مشخص کنند یا بیان آنها از تعریف به خوبی حوزهٔ تعریف را مشخص کند. اگر کسی به این نکته توجه نکند و بخواهد یک تعریف ریاضی را بیان کند خودش هم نخواهد فهمید چه چیزی را و در کجا تعریف کرده است. برای مثال تعریف حد در کتاب حسابان(۱) چاپ ۹۷ به شکل زیر است:

فرض کنیم تابع f در یک همسایگی عدد a (به جز احتمالاً در خود a) تعریف شده باشد. می‌گوییم «حد تابع f وقتی x به a نزدیک می‌شود برابر عدد حقیقی L است» هرگاه ......

گذشته از اضافاتی که در این تعریف وجود دارد، قاعدتاً منظور مولف آن است آنچه که در قسمت «فرض می-کنیم» آورده است مشخص کننده حوزه یا دامنهٔ تعریف حد تابع است و قسمت بعد از «می‌گوییم»، نامگذاری مفهوم حد است و قسمت بعداز «هرگاه» ویژگی اصلی مشخص کننده مفهوم حد است. با این فرض که مولف به اصول و قواعد تعریف در ریاضی آشنایی دارد باید نتیجه بگیریم که تعریف حد یک تابع در یک نقطه، مخصوص توابعی است که در یک همسایگی محذوف دوطرفه آن نقطه تعریف شده‌اند و اگر چنین شرطی برقرار نشد

سخنی از حد داشتن یا حد نداشتن نخواهد بود. مانند مفهوم متساوی‌الساقین که برای مثلث‌ها است و اگر چیزی مثلث نبود سخنی از متساوی‌الساقین بودن یا نبودن در کار نیست. اما متاسفانه ظاهرا مولفین با تبعات منطقی تعریف خود آشنایی ندارند و در صفحات بعد که تابعی در یک همسایگی دو طرفه نقطه‌ای تعریف نشده است نتیجه می‌گیرند حد در آن نقطه وجود ندارد در حالی که باید نتیجه می‌گرفتند که مفهوم حد در این حالت برای این دسته از توابع در چنین نقاطی تعریف نشده است. احتمالاً مولفین با این ظرافت‌های منطقی در صحبت کردن آشنایی ندارند و گمان می‌کنند فرقی ندارد که بگوییم «حد در این حالت تعریف نشده است» یا بگوییم « حد در این حالت وجود ندارد». اتفاقاً فرق ریاضی با سایر علوم در همین دقت‌های منطقی در بیان و استفاده صحیح از الفاظ است. اگر قرار باشد تفاوت الفاظ و معنای آنها را ندانیم بهتر است به کار دیگری مشغول شویم. اگر مولفین دوست دارند به همین شیوه فکر کنند و تعریف کنند توصیه می‌کنم تعریف خود را به شکل زیر تغییر دهند تا متناسب حرفهای آنها باشد.

فرض کنید f یک تابع و a یک عدد دلخواه باشد. گوییم حد تابع f در نقطهٔ a برابر عدد L است هرگاه تابع f در یک همسایگی عدد a (به جز احتمالاً در خود a) تعریف شده باشد و .....

در تعریف بالا حوزهٔ تعریف همهٔ توابع و همهٔ نقاط در اعداد حقیقی هستند، و این بار ویژگی تعریف شدگی تابع در یک همسایگی محذوف نقطه، بخشی از تعریف است که اگر برقرار نشد می‌توانیم بگوییم شرایط وجود حد برقرار نیست و حد وجود ندارد.

در هر تعریف ریاضی معمولا فرضیاتی مطرح می‌شود که معمولاً با اصطلاح «فرض کنید...» آغاز می‌شود. در این قسمت حوزه و دامنهٔ تعریف مشخص می‌شود. قسمتی هم وجود دارد که مربوط به نامگذاری مفهوم است که معمولاً با اصلاح «می‌گوییم .....» آغاز می‌شود و قسمت اصلی تعریف، ارائه ویژگی‌های اصلی مفهوم است که معمولاً با اصطلاح «هرگاه ....» آغاز می‌شود.

قسمت «فرض کنید...» شرایط ورود به تعریف را مشخص می‌کند و قسمت «هرگاه ....» بخش اصلی تعریف است که برقرار شدن یا نشدن آن را به صورت برقرار بودن یا نبودن مفهوم بیان می‌کنیم. برخی، تفاوت و تمایز بین شرایط ورود به تعریف و بخش اصلی تعریف را نادیده می‌گیرند و شرایط ورود به تعریف را بخشی از تعریف در نظر می‌گیرند. این که در یک تعریف چه چیزی در شرایط ورود به تعریف باشد و چه چیزی بخش اصلی تعریف باشد مربوط به تصمیم تعریف کننده است و ریاضیدانها معمولا به گونه‌ای عمل می‌کنند که عصاره اصلی مفهوم بخش اصلی تعریف باشد و شرایطی که لازم است تا فراهم باشد که بتوان آن مفهوم را بیان کرد جزو شرایط ورود به تعریف قرار می‌دهند. در اینجا دست باز است و هیچ اجبار منطقی در کار نیست که چه چیزی بخشی از تعریف باشد و چه چیزی جزو شرایط تعریف. ولی هر انتخابی که انجام شود باید به آن پایبند باشیم و تعاریف را

بر اساس انتخاب انجام شده به درستی ارائه کنیم. نه این که مثلاً حد تابع را به گونه‌ای تعریف کنیم که تعریف شدگی تابع در یک همسایگی محذوف نقطه، از شرایط ورود به مفهوم حد باشد و بعد به گونه‌ای صحبت کنیم که این شرط جزو بخش اصلی تعریف حد باشد.

نمونه روشن‌تر شکل‌های مختلف یک تعریف را می‌توان در تعریف پیوستگی یافت. طبق تعریف پیوستگی یک تابع در یک نقطه در حسابان(۱) چاپ ۹۷، جملهٔ در کادر آن هیچ استانداردی از شیوهٔ درست تعریف کردن را رعایت نکرده است و به ناچار در جملات بعدی تا حدی تعریف کردن خود را اصلاح می‌کند و می‌گوید:

برای پیوسته بودن تابع f در نقطهٔ a باید شرایط زیر برقرار باشند:

الف) تابع f در a تعریف شده باشد.

ب) حد تابع f در a موجود باشد.

پ) مقدار حد تابع f در a با مقدار $f(a)$ برابر باشد.

ظاهراً منظور مولف از این شیوهٔ تعریف این است که شرایط ورود به تعریف فقط داشتن یک تابع و یک نقطه است. بعد، سه شرط داده شده بخش اصلی تعریف هستند که اگر برقرار شدند تابع در این نقطه پیوسته است و اگر یکی از آنها برقرار نشد تابع در این نقطه ناپیوسته است. مشکلات این تعریف را در جدول بالا بیان کرده‌ایم و برای اصلاح این تعریف کافی است که شرط (الف) را به عنوان شرط ورود به تعریف بگیریم نه این که در بخش اصلی تعریف قرار گیرد. با این تغییر، تعریف پیوستگی به شکل زیر در می‌آید:

فرض کنید f یک تابع و a نقطه‌ای از دامنهٔ آن باشد. گوییم تابع f در نقطهٔ a پیوسته است هرگاه حد f در a موجود و برابر $f(a)$ باشد.

این تغییر در تعریف پیوستگی، تغییری در پیوسته بودن تابع‌ها ایجاد نمی‌کند ولی در ناپیوستگی تغییر ایجاد می‌کند. در این تعریف اگر نقطه‌ای خارج از دامنهٔ تابع باشد شرایط ورود به تعریف برقرار نیست و گوییم صحبتی از پیوستگی و ناپیوستگی تابع در این نقطه نداریم، در حالی که طبق تعریف قبلی باید می‌گفتیم تابع در این نقطه ناپیوسته است.

مراجع:

(۱) کتاب اصول آنالیز رودین: این کتاب منبع اصلی درس آنالیز دانشگاه‌ها است. کسانی که در حد دانشگاهی می‌توانند در مورد حد و پیوستگی مطالعه داشته باشند می‌توانند با خواندن این کتاب تعاریف حد و پیوستگی را در فضاهای متریک یاد بگیرند و سپس در حالت توابعی که در کلکولس می‌شناسند پیاده کنند.

(۲) کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال آدامز: فصل پیوستگی این کتاب منطبق بر نگرش جدید به این مفهوم نوشته شده است.

(۳) سایت عمومی برای تعریف سریع حد در شکل‌های مختلف آن: https://en.wikipedia.org/wiki/Limit_of_a_function

(۴) سایت عمومی برای تعریف سریع پیوستگی: https://en.wikipedia.org/wiki/Continuous_function