

۱- نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید.

الف) همه دکترا، پول دار هستند.

ب) لامبورگینی‌ای وجود دارد که قرمز باشد.

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv q \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

۲- با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها نشان دهید:

۳- ارزش‌های گزاره‌ای سوری زیر را تعیین کنید و نقیض هر یک را بنویسید.

$$\exists x \in \mathbb{R} : \sqrt{-x} \in \mathbb{Z} \quad (۱)$$

$$\exists n \in \mathbb{N} : 2^n > 1000 \quad (۲)$$

۴- گزاره‌های زیر را به زبان ریاضی بیان کرده و ارزش آن‌ها را تعیین کنید.

(۱) مجذور بعضی از اعداد صحیح با خود آن عدد صحیح مساوی است.

(۲) وجود دارد عدد طبیعی مانند a به طوری که $-2a + 1 > 0$

(۳) بعضی از اعداد حقیقی، گویا نیستند.

۵- ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید.

$$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 2 = 0 \quad (۱)$$

$$\forall x \in \mathbb{P} : x = 2k + 1, (k \in \mathbb{N}) \quad (۲)$$

$$\exists x \in \mathbb{Z} : x^5 + 1 = 0 \quad (۳)$$

۶- با استفاده از جدول ارزش‌ها نشان دهید:

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r \quad (ب) \quad \sim(p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q \quad (آ)$$

۷- کدام یک از جمله‌های زیر گزاره‌ی مرکب است؟ ارزش گزاره‌های مرکب را تعیین کنید.

$$(W \notin Z) \vee (\{2\} \in \{2, 3\}) \quad (۱)$$

$$\left((3^2)^2 = 81 \right) \wedge (2^2 = 16) \quad (۲)$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 \quad (۳)$$

۸- هرگاه $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq x < 2\}$ دامنه‌ی متغیر باشد، ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید.

$$\forall x \in A : 2x + 1 > -3 \quad (ب) \quad \forall x \in A : x + 3 \leq 4 \quad (آ)$$

۹- با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها نشان دهید:

$$p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p \quad (ب) \quad p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q \quad (آ)$$

۱۰- اگر $A = \{a, b, c, d, e\}$ و $B = \{a, b, f\}$ باشد، چند مجموعه مانند X می‌توان داشت بطوری‌که:

$$A \cap B \subset X \subset A \cup B$$

۱۱- در صورتی که تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه $k + 1$ عضو $k + 1$ واحد از تعداد زیرمجموعه‌های محض یک مجموعه‌ی $k - 1$ عضو بیشتر باشد، مقدار k را بیابید.

$$\bigcup_{i=1}^2 \bigcap_{j=1}^2 A_{ij}$$

$$۱۲- اگر $A_{ij} = [i^2 + 1, j^3 + 4]$ باشد مطلوبست:$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \quad (الف)$$

$$۱۳- اگر $A_n = [-n, n]$ و $n \in \mathbb{N}$ مطلوبست:$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad (ب)$$

۱۴- اگر $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 3\}$ و $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 4\}$ نمودار $A \times B$ را در صفحه مختصات نمایش دهید.

۱۵- اگر $(n \in \mathbb{N})$ و $A_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{2n-1}{n}\right)$ مطلوبست: A_1, A_2, A_3, A_4 سپس اجتماع و اشتراک A_1, A_2, A_3, A_4 را مشخص کنید.

۱۶- اگر $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, 0 \leq x \leq 1\}$ ، $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}$ باشد، مجموعه $A \times B - A^2$ را با اعضاء نشان دهید.

۱۷- به کمک جبر مجموعه‌ها ثابت کنید:

$$\text{الف) } [A \cap (A' \cup B)] \cup [B \cap (A' \cup B')] = B$$

$$\text{ب) } B \subset A \Rightarrow A' \subset B'$$

۱۸- اگر $i \in \mathbb{N}$ و $A_i = [-2i, 8-i]$ ، A_1, A_2, A_3, A_4 را تعیین کنید. سپس $\bigcap_{i=1}^4 A_i$ و $\bigcup_{i=1}^4 A_i$ را مشخص کنید.

۱۹- اگر $A_n = \{m \in \mathbb{Z} \mid -n \leq m, 2^m \leq n\}$ ، A_1, A_2, A_3, A_4 را تعیین کنید. چه رابطه‌ای بین A_1, A_2, A_3, A_4 وجود دارد؟

$$\left(\bigcap_{i=1}^4 A_i = ? \right) \text{ اشتراک } A_1 \text{ تا } A_4 \text{ چیست؟}$$

$$\left(\bigcup_{i=1}^4 A_i = ? \right) \text{ اجتماع } A_1 \text{ تا } A_4 \text{ چیست؟}$$

$$\left(\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n : \text{توضیح} \right)$$

۲۰- کدام یک از مجموعه‌های زیر با هم مساویند؟

$$A = \{m \in \mathbb{Z} \mid |m| < 2\} = \{-1, 0, 1\}$$

$$B = \{m \in \mathbb{Z} \mid m^3 = m\} = \{-1, 0, 1\}$$

$$C = \{m \in \mathbb{Z} \mid m^2 \leq 2m\} = \{0, 1, 2\}$$

$$D = \{m \in \mathbb{Z} \mid m^2 \leq 1\} = \{0, 1, 2\}$$

$$E = \{0, 1, 2\}$$

۲۱- از ظرفی شامل ۱۰ مهره سفید و سیاه، ۲ مهره خارج می‌کنیم، اگر احتمال هم‌رنگ بودن مهره‌ها برابر $\frac{7}{15}$ باشد، مطلوبست تعداد مهره‌های سفید.

۲۲- یک تاس طوری ساخته شده است که احتمال وقوع هر وجه متناسب با مربع عدد روی وجه است، در پرتاب این تاس به چه احتمالی عدد اول می‌آید؟

۲۳- فضای نمونه $S = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ مفروض است. اگر $p(a_1) = 2p(a_2)$ و $p(a_3) = 4p(a_4)$ و $p(a_4) = 3p(a_1)$ باشد، مطلوبست احتمال وقوع a_1 یا a_4 .

۲۴- یک خانواده سه فرزندی که فرزند پسر هم دارد، به چه احتمالی فرزند دختر هم دارد؟

- ۲۵- یک تاس قرمز و سفید را با هم می‌ریزیم، مطلوب‌بست احتمال این که مجموع اعداد ظاهر شده بر ۴ بخش‌پذیر باشد.
- ۲۶- ۴ مهره‌ی سفید و ۳ مهره‌ی سیاه را کنار هم می‌چینیم، به چه احتمالی مهره‌های هم‌رنگ کنار هم قرار نمی‌گیرند؟
- ۲۷- جعبه‌ای محتوی ۴ مهره‌ی سفید و ۳ مهره‌ی سیاه است. یکی یکی دو مهره به تصادف و بدون جایگذاری از جعبه بیرون می‌آوریم. احتمال این که مهره‌ی دوم هم‌رنگ مهره‌ی اول باشد را محاسبه کنید.
- ۲۸- توابع از $A = \{1, 2, 3, 4\}$ به $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ را می‌نویسیم، به چه احتمالی در برد تابع حتماً ۸ داریم؟ (A دامنه است و اعضای برد را از B برمی‌داریم.)

یک فضای نمونه‌ای متشکل از ۴ برآمد a, b, c, d است. به شرط آن که $P(\{b, c, d\}) = \frac{2}{3}$ و $P(\{b\}) = \frac{1}{4}$

مطلوب است:

$$P(\{a, c, d\} | \{b, c, d\}) \quad -29$$

$$P(\{a\} | \{a, c, d\}) \quad -30$$

- ۳۱- تاسی به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال وقوع اعداد اول ۲ برابر سایر اعداد است. این تاس را پرتاب می‌کنیم. احتمال آن که عدد ظاهر شده بیش‌تر از ۳ باشد را بیابید.
- ۳۲- از بین ۷ کلاس اولی و ۵ کلاس دومی ۴ نفر به طور تصادفی انتخاب می‌کنیم، مطلوب‌بست احتمال این که حداکثر ۳ کلاس دومی انتخاب شده باشند.
- ۳۳- از یک سبد محتوی ۴ سیب سالم و ۵ سیب فاسد، ۲ سیب بطور تصادفی بیرون می‌آوریم. مطلوب است احتمال آنکه هر دو سیب سالم باشند.
- ۳۴- تکمیل بنای راهی ممکن است به دلیل اعتصاب کارگران به تأخیر افتد. فرض کنید احتمال اینکه اعتصابی رخ دهد $\frac{6}{10}$ باشد و احتمال این که اگر اعتصابی نباشد کار به موقع انجام شود $\frac{8}{10}$ و احتمال این که اگر اعتصابی باشد کار به موقع انجام شود $\frac{3}{10}$ باشد. احتمال این که کار بنای راه به موقع انجام شود چقدر است؟
- ۳۵- یک تاس به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد فرد دو برابر احتمال وقوع هر عدد زوج است. در پرتاب این تاس احتمال آن که عدد ظاهر شده بزرگ‌تر از ۴ باشد را بیابید.
- ۳۶- فرض می‌کنیم $S = \{a, b, c, d\}$ مطلوب است $P(a)$ و $P(b)$ ، در صورتی که داشته باشیم:

$$P(a) = 2P(b) \text{ و } P(c) = P(d) = \frac{1}{4}$$

- ۳۷- توابع از $A = \{1, 2, 3, 4\}$ به $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ را می‌نویسیم، به چه احتمالی تابع یک به یک است؟ (A دامنه است و اعضای برد را از B برمی‌داریم.)
- ۳۸- در یک خانواده با دو فرزند احتمال این که بچه‌ها از دو جنس مخالف و یا هر دو دختر باشند را پیدا کنید.
- ۳۹- از بین ۱۲ دانشجو می‌خواهیم به طور تصادفی ۴ نفر را برای تشکیل تیم کوهنوردی دانشگاه انتخاب می‌کنیم. اگر ۷ نفر از این دانشجویان در رشته‌ی فیزیک و ۵ نفر در رشته‌ی شیمی مشغول به تحصیل باشند، مطلوب است احتمال آن که در این تیم:
- (الف) فقط یک دانشجوی رشته‌ی فیزیک باشد.
- (ب) حداقل ۳ نفر از آنها دانشجوی رشته‌ی فیزیک باشند.
- ۴۰- اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ی S باشند، $2p(A) = 3p(B) = 1$ و احتمال این که دست کم یکی از پیشامدهای A و B اتفاق بیفتد برابر $\frac{2}{3}$ باشد، احتمال این که A رخ دهد ولی پیشامد B روی ندهد، چقدر است؟

سن بازیکنان تیم ملی فوتبال یک کشور به شرح زیر است:

۲۲، ۲۳، ۱۸، ۳۱، ۱۹، ۲۹، ۲۶، ۲۶، ۲۴، ۲۷
۳۳، ۲۵، ۲۵، ۲۹، ۲۳، ۲۷، ۲۶، ۲۵
۲۵، ۲۶، ۲۱، ۳۱

به ۴ سوال بعدی پاسخ دهید.

۴۱- میانگین، مد و میانه سن بازیکنان این تیم را به دست آورید.

۴۲- تعداد بازیکنانی که سن آنها بالاتر از میانگین است، بیشتر است یا تعداد بازیکنانی که سن آنها از میانگین کم تر است؟

۴۳- تعداد بازیکنانی که سن آنها بالاتر از میانه است بیشتر است یا تعداد بازیکنانی که سن آنها از میانه کم تر است؟

۴۴- میانه و میانگین را در این بررسی مقایسه کنید. چه نتیجه ای می گیرید؟

۴۵- کدام یک از برابری های زیر درباره انحراف معیار درست است؟

$$\sigma_{ax+b} = |a| \sigma_x \quad (۱) \quad \sigma_{ax+b} = -a\delta_x \quad (۲) \quad \sigma_{ax+b} = a\delta_x \quad (۳)$$

جدول زیر قد ۳۰ دانش آموز را بر حسب سانتی متر نشان می دهد:

۱۶۰ و ۱۵۰ و ۱۵۵ و ۱۳۷ و ۱۷۵ و ۱۷۷
۱۷۷ و ۱۶۹ و ۱۴۰ و ۱۷۹ و ۱۴۶ و ۱۳۲
۱۳۰ و ۱۳۵ و ۱۷۶ و ۱۳۰ و ۱۴۸ و ۱۴۱
۱۳۶ و ۱۴۳ و ۱۴۳ و ۱۷۸ و ۱۷۲ و ۱۵۷
۱۷۸ و ۱۴۵ و ۱۵۱ و ۱۳۰ و ۱۶۶ و ۱۳۲

به ۹ سؤال بعدی پاسخ دهید.

۴۶- میانگین قد این دانش آموزان را حساب کنید.

۴۷- اگر به تمام این داده ها ۵ تا اضافه شود، چه تغییری در میانگین حاصل می شود؟

۴۸- اگر از تمام این داده ها ۱۲ تا کم شود، چه تغییری در میانگین حاصل می شود؟

۴۹- با اضافه کردن a چه تغییری در میانگین حاصل می شود؟

۵۰- اگر تمام داده ها در ۲ ضرب شوند، چه تغییری در میانگین حاصل می شود؟

۵۱- اگر تمام داده ها در $\frac{0}{2}$ ضرب شوند، چه تغییری در میانگین حاصل می شود؟

۵۲- اگر تمام داده ها در $a > 0$ ضرب شوند چه تغییری در میانگین حاصل می شود؟

۵۳- اگر تمام داده ها در $a < 0$ ضرب شوند، چه تغییری در میانگین حاصل می شود؟

۵۴- با توجه به نتایج به دست آمده در بالا، میانگین داده های زیر را به دست آورید.

الف- ۱۴۱۲ و ۱۳۰۰ و ۱۳۴۲ و ۱۳۰۷ و ۱۳۱۷ و ۱۳۲۸

ب- ۸۰۳۸ و ۱۰۰۳۸ و ۳۰۳۸ و ۴۰۳۸ و ۱۰۳۸ و ۲۰۳۸

نمرات درس فیزیک دانش آموزی در طول سال برابر است با:

۱۷، ۱۹، ۱۸، ۷، ۱۸/۵، ۱۹

به ۲ سوال بعد پاسخ دهید.

۵۵- میانه و میانگین، مد را برای نمرات این دانش آموز حساب کنید.

۵۶- اگر معلم درس فیزیک این دانش آموز، برای جبران نمره ۷، امکان امتحان مجدد را به او بدهد، برای این که میانگین

وی در این درس ۱۸/۵ شود، او در این امتحان چه نمره ای باید کسب کند؟

دو گروه داده به صورت زیر داریم:

گروه اول: ۱ ۲ ۳ ۴ ۵

گروه دوم: ۳ ۶ ۹ ۱۲ ۱۵

به ۴ سؤال بعدی پاسخ دهید:

۵۷- واریانس هر گروه را حساب کنید.

۵۸- این دو گروه داده چه رابطه‌ای با هم دارند؟

۵۹- رابطه‌ی موجود بین این دو گروه داده، چه تأثیری روی واریانس داشته است؟

۶۰- نتیجه‌ی حاصل از قسمت قبل را توضیح دهید.