

**پاسخ شریعی سؤالات ریاضی**

**کنکور سراسری خارج از کشور سال ۱۳۹۴**

**توسط سیدامیر ستوده**

دبیر مراکز پرورش استعدادهای درخشان

سایت کنکور  
۰۹۱۲۱۶۱۴۲۹۶

پاسخ تشریحی سؤالات دروس ریاضی کنکور سراسری خارج از کشور سال ۱۳۹۴ توسط  
سیدامیر ستوده

۱۰۱-گزینه ۱

$$a_1 = 1/45, \quad a_r = 1/4545$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1/45 = \frac{144}{99}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{A} = \frac{99}{144} = 0.6875$$

۱۰۲-گزینه ۱

$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(ax + b)$$

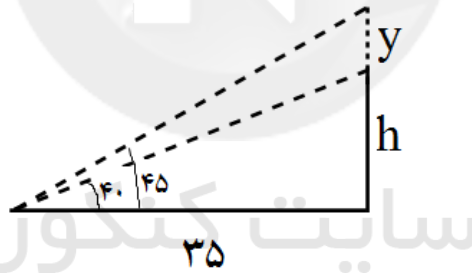
و ضمناً  $f(-1) = 0$  و  $f(1) = -1$  بنابراین داریم:

$$\log_{\frac{1}{2}}(a + b) = -1 \Rightarrow a + b = 2$$

و

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ -a + b = 1 \end{cases} \Rightarrow 2b = 3 \Rightarrow b = \frac{3}{2}$$

۱۰۳-گزینه ۴



$$\tan 45^\circ = \frac{y+h}{35} = 1 \Rightarrow y+h = 35$$

$$\tan 40^\circ = \frac{h}{35} = 0.8 \Rightarrow h = 0.8 \times 35 = 28$$

$$\Rightarrow y = 7$$

۱۰۴. گزینه ۴

$$\binom{4}{1} \times \binom{4}{1} \times 5 \times 4 \times 3 = 960$$

۱۰۵. گزینه ۳

$$۲, ۷, ۱۲, ۱۷, ۲۲, \dots$$

$$۸, ۱۱, ۱۴, ۱۷, ۲۰, \dots$$

اولین عدد مشترک در دو دنباله ۱۷ است. دنباله‌ی جملات مشترک نیز دنباله‌ای حسابی با قدر نسبت ک.م.م دو دنباله یعنی  $۱۵ = ۵ \times ۳$  است بنابراین:

$$a_n = ۱۷ + (n-1) \times ۱۵ = ۱۵n + ۲$$

$$۱۰۰ \leq ۱۵n + ۲ \leq ۹۹۹ \Rightarrow ۹۸ \leq ۱۵n \leq ۹۹۷$$

$$\Rightarrow n = ۷, \dots, ۶۶$$

تعداد این جملات  $۶۶ - ۷ + ۱ = ۶۰$  است.

۱۰۶. گزینه ۴

عبارت  $p(x) = x^2 + ax^2 - bx + 4$  را در نظر می‌گیریم واضح است که  $P'(1) = 0$  و  $P(1) = 0$  بنابراین  $a - b = -5$  و  $P'(1) = 4 + 2a - b = 0 \Rightarrow a - b = -5$  از حل دستگاه به دست آمده داریم:  $b = 6$

۱۰۷. گزینه ۲

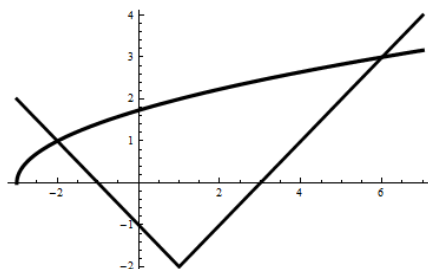
$$g(x) = x - \sqrt{x}, \quad f(6) = 0, \quad f\left(-\frac{1}{4}\right) = 0$$

$$(f \circ g)(x) = 0 \Rightarrow f(g(x)) = 0 \Rightarrow \begin{cases} g(x) = 6 \\ g(x) = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

اگر  $g(x) = 6$  آنگاه  $x - \sqrt{x} = 6$  بنابراین  $(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 2) = 0$  که نتیجه می‌دهد:  $x = 9$ .

اگر  $g(x) = -\frac{1}{4}$  آنگاه  $x - \sqrt{x} = -\frac{1}{4}$  بنابراین  $(\sqrt{x} - \frac{1}{4})^2 = 0$  که نتیجه می‌دهد:  $x = \frac{1}{16}$ .

۱۰۸. گزینه ۳



$$\sqrt{x+3} \geq |x-1| - 2$$

$$\sqrt{x+3} = x-3 \Rightarrow x+3 = x^2 - 6x + 9 \Rightarrow x^2 - 7x + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 & \times \\ x=6 \end{cases}$$

\*\*\*\*\*

$$\sqrt{x+3} = -x-1 \Rightarrow x+3 = x^2 + 2x + 1$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 & \times \\ x=-2 \end{cases}$$

بنابراین جواب نامعادله‌ی مورد نظر (۶ و -۲) است و بیشترین طول این بازه ۸ است.

۱۰۹. گزینه ۲

$$\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = \tan 3x \Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \tan 3x$$

$$\Rightarrow 3x = k\pi + \left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

$$\Rightarrow 4x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{16}$$

۱۱۰- گزینه ۱

با توجه به اینکه نمودار تابع، مجانب افقی با عرض منفی است پس حد تابع  $U(x)$  در بینهایت باید عددی منفی شود و لذا گزینه‌های ۳ و ۴ حذف می‌شوند.  
از طرفی در گزینه ۲ ریشه مخرج  $x = -1$  است ولی در شکل تابع به ازای  $x = -1$  تعریف شده است پس گزینه ۲ نیز غلط است.

۱۱۱- گزینه ۲

$$\sin(\cos^{-1} \frac{3}{5} + \cos^{-1}(-\frac{4}{5}))$$

با فرض  $\cos^{-1} \frac{3}{5} = \alpha$  و  $\cos^{-1}(-\frac{4}{5}) = \beta$  داریم  $\cos \alpha = \frac{3}{5}$  و  $\cos \beta = -\frac{4}{5}$ .  
بنابراین  $\sin \beta = \frac{3}{5}$  پس داریم:

$$\sin(\cos^{-1} \frac{3}{5} + \cos^{-1}(-\frac{4}{5})) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{4}{5} \times \frac{-4}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = -\frac{7}{25}$$

۱۱۲- گزینه ۴

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1 - \sqrt{x - \sqrt{x+1}}}{x - 3}$$

$$\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1 - \frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{2\sqrt{x - \sqrt{x+1}}} = -\frac{3}{8}$$

از طرفی  $f(3) = -\frac{3}{8}$  و داریم

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\frac{3}{8}$$

بنابراین به ازای هر مقدار  $a$  تابع در نقطه‌ی  $x = 3$  پیوسته است.

۱۱۳- گزینه ۳

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(\log(n+1) - \log n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \log \frac{n+1}{n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \log(1 + \frac{1}{n})^n$$

$$= \log e$$

۱۱۴- گزینه ۲

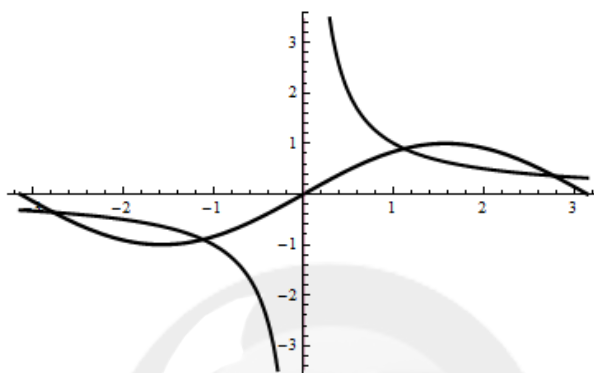
به ازای هر  $x$  که  $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$  داریم  $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ . بنابراین اگر  $x \rightarrow 0$  آنگاه در یک همسایگی از  $x$  مانند  $\delta$  داریم  $\left[\frac{\sin x}{x}\right] = 0$  و لذا در این همسایگی  $\left[\frac{\sin x}{x}\right] \cot x = 0 \times \cot x = 0$  و لذا

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin x}{x}\right] \cot x = 0$$

۱۱۵- گزینه ۲

$$x \sin x = 1 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{x}$$

با توجه به شکل، معادله در این بازه دارای ۴ ریشه است.



۱۱۶- گزینه ۲

مجانب‌های قائم نمودار این تابع،  $x=1$  و  $x=-1$  اند. فرض کنیم  $y=ax+b$  مجانب مایل تابع باشد. در این صورت

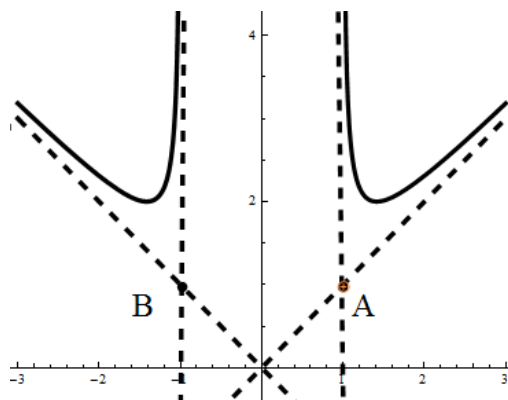
$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \pm 1$$

و

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} - x \right) = 0$$

یعنی  $y = \pm x$  و  $y = -x$  مجانب‌های مایل تابعند و نقاط برخورد این مجانب‌ها  $A = (1, 1)$  و

$$B = (-1, -1) \text{ است لذا } |AB| = \sqrt{2^2 + 0^2} = 2$$



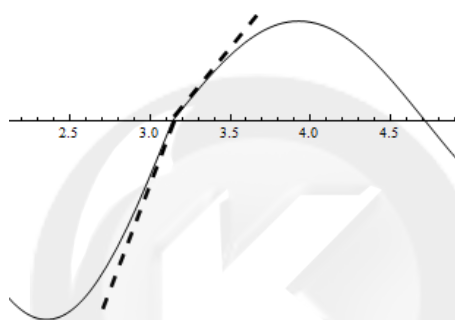
۱۱۷- گزینه ۳

$$f(x) = \left[ 2 + \cos \frac{x}{2} \right] \sin 2x$$

$$m_1 = f'(\pi)^+ = 2 \cos 2\pi = 2$$

$$m_2 = f'(\pi)^- = 2 \times 2 \cos 2\pi = 4$$

$$\tan \theta = \frac{|m_1 - m_2|}{|1 + m_1 m_2|} = \frac{|2 - 4|}{|1 + 4 \times 2|} = \frac{2}{9}$$



۱۱۸- گزینه ۱

$$x^2 y + y^2 + 3 = 0 \Rightarrow 2xy + x^2 y' + 2y y' = 0$$

$$\Rightarrow 2y + 2xy' + 2xy' + x^2 y'' + 2(y''y + y'^2) = 0$$

اگر  $x = 2$  آنگاه  $y = -1$  و  $y' = 2$  بنابراین

$$-2 + 4 \times 2 + 4 \times 2 + 4y'' + 2(-y'' + 4) = 0 \Rightarrow 14 + 4y'' - 2y'' + 8 = 0$$

$$\Rightarrow 2y'' = -22 \Rightarrow y'' = -11$$

۱۱۹- گزینه ۴

چون  $f$  محور  $y$ ها را در  $(0, 1)$  قطع می‌کند  $f^{-1}$  محور  $x$ ها را در نقطه  $(1, 0)$  قطع می‌کند.

$$(f^{-1})'(1) = (f^{-1})'(f(0)) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{1 + e^0} = \frac{1}{2}$$

بنابراین شیب خط قائم بر نمودار  $f^{-1}$  در  $x = 1$  برابر  $-2$  است و معادله‌ی خط قائم به صورت زیر است

$$y - 0 = -2(x - 1) \Rightarrow y + 2x = 2$$

۱۲۰- گزینه ۲

$$y = x \ln |x| = \begin{cases} x \ln x & x > 0 \\ x \ln(-x) & x < 0 \end{cases}$$

پس

$$y' = \begin{cases} 1 + \ln x & x > 0 \\ 1 + \ln(-x) & x < 0 \end{cases}$$

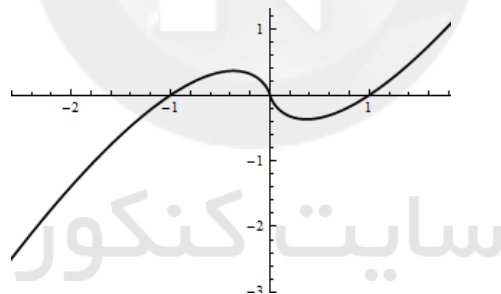
برای حل  $y' < 0$  واضح است که جوابها در حالت  $x > 0$  نیستند بنابراین اگر  $x < 0$  آنگاه  
 $y' = 1 + \ln(-x) < 0$  و لذا  $\ln(-x) < -1$  پس داریم

$$\ln(-x) < \ln \frac{1}{e} \Rightarrow -x < \frac{1}{e} \Rightarrow x > -\frac{1}{e}$$

اما

$$y'' = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ \frac{1}{x} & x < 0 \end{cases}$$

پس  $y'' < 0$  یعنی  $\frac{1}{x} < 0$  که به ازای  $x < 0$  اتفاق می افتد.



۱۲۱. گزینه ۴

$$A = (-5, 0), \quad M = (x, \sqrt{25 - x^2})$$

$$L = AM = \sqrt{(x+5)^2 + 25 - x^2} = \sqrt{10x + 50}$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dL}{dx} \times \frac{dx}{dt} = \frac{10}{2\sqrt{10x+50}} \times \frac{dx}{dt} = \frac{2}{10} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{10x+50}}{25}$$

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{25 - x^2}}{x} \Rightarrow \theta = \tan^{-1} \sqrt{\frac{25}{x^2} - 1}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dx} \times \frac{dx}{dt} = \frac{-\sqrt{10x+50}}{25x\sqrt{\frac{25}{x^2} - 1}}$$



در لحظه‌ای که  $MA = 6$  داریم:

$$\sqrt{10x + 50} = 6 \Rightarrow x = -\frac{y}{5}$$

بنابراین:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{-\sqrt{10 \cdot (-\frac{y}{5}) + 50}}{25(-\frac{y}{5}) \sqrt{\frac{25}{(-\frac{y}{5})} - 1}} = 0.5$$

۱۲۲. گزینه ۱

با توجه به شکل  $f'(-1) = 0$  و  $f''(-1) = 0$  بنابراین داریم:  $-2a + b = 7$  و  $a = -9$  که  $b = -11$  محاسبه می‌شود.

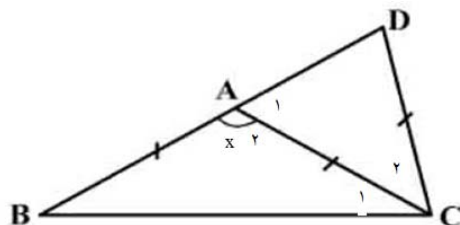
۱۲۳. گزینه ۳

$$\begin{aligned} f(c)(c-1) - \int_1^c f(x) dx &= \int_c^f f(x) dx - f(c) - (f-2) \Rightarrow 3f(c) = \int_1^f f(x) dx \\ \Rightarrow f(c) &= \frac{1}{3} \int_1^f \frac{x-1}{\sqrt{x}} dx \\ &= \frac{1}{3} \int_1^f (x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}) dx \\ &= \frac{1}{3} \left( \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} \right) \Big|_1^f \\ &= \frac{1}{3} \left[ \frac{14}{3} - \frac{6}{3} \right] = \frac{8}{9} \end{aligned}$$

۱۲۴. گزینه ۱

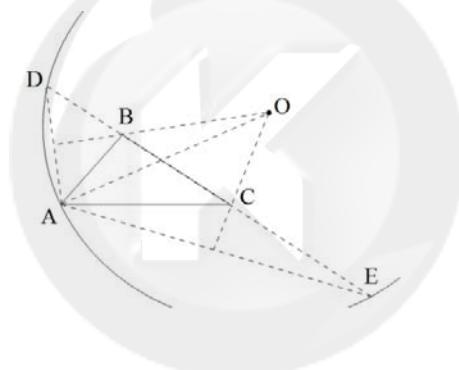
$$\begin{aligned} \int_1^r \frac{x^r - [x]}{x+1} dx &= \int_1^r \frac{x^r}{x+1} dx + \int_1^r \frac{x^r - 1}{x+1} dx \\ &= \int_1^r \frac{x^r - 1}{x+1} dx + \int_1^r \frac{1}{x+1} dx + \int_1^r \frac{x^r - 1}{x+1} dx \\ &= \int_1^r \frac{x^r - 1}{x+1} dx + \int_1^r \frac{1}{x+1} dx \\ &= \int_1^r (x-1) dx + \int_1^r \frac{1}{x+1} dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 - x \Big|_1^r + \ln(x+1) \Big|_1^r \\ &= \ln 2 \end{aligned}$$

۱۲۵- گزینه ۳



$$\begin{aligned} \hat{A} = x \Rightarrow \hat{B} = 90 - \frac{x}{2} \Rightarrow \hat{D} = \hat{A}_1 &= \frac{180 - (90 - \frac{x}{2})}{2} = 45 + \frac{x}{4} \\ \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 180 \Rightarrow x + 45 + \frac{x}{4} &= 180 \Rightarrow \frac{5}{4}x = 135 \Rightarrow x = 108 \end{aligned}$$

۱۲۶. گزینه ۴



مرکز دایره محیطی مثلث ADE بر روی عمودمنصف پاره‌خط‌های AD و AE واقع است. اما چون  $AB = DB$  پس مثلث BAD متساوی‌الساقین است و عمودمنصف AD همان نیمساز زاویه B است. به همین ترتیب در مثلث ACE نیز چنین است در حقیقت مرکز این دایره روی نقطه‌ی هم‌رسی نیمسازهای خارجی زوایای B, C با نیمساز داخلی زاویه A قرار دارد.

۱۲۷. گزینه ۴

$$\begin{aligned} \triangle AMD \cong \triangle NMB &\Rightarrow \frac{MD}{MB} = \frac{AM}{NM} \\ \triangle AMB \cong \triangle PMD &\Rightarrow \frac{MD}{MB} = \frac{PM}{AM} \end{aligned}$$

بنابراین:

$$\frac{MD}{MB} = \frac{AM}{NM} = \frac{PM}{AM} \Rightarrow NM \times PM = AM^2$$

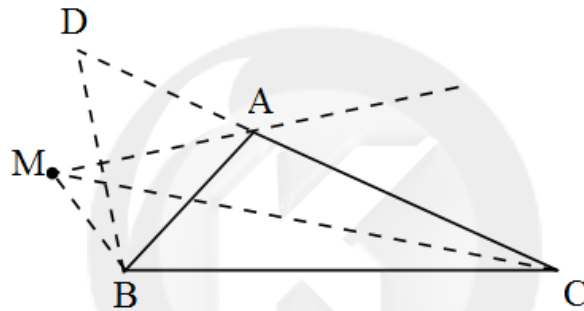
۱۲۸. گزینه ۱

ضلع  $AC$  را از طرف  $A$  تا نقطه‌ی  $D$  امتداد می‌دهیم به طوری که  $AD = AB$  بنابراین نیمساز خارجی زاویه  $A$  عمود منصف  $BD$  است. پس داریم:

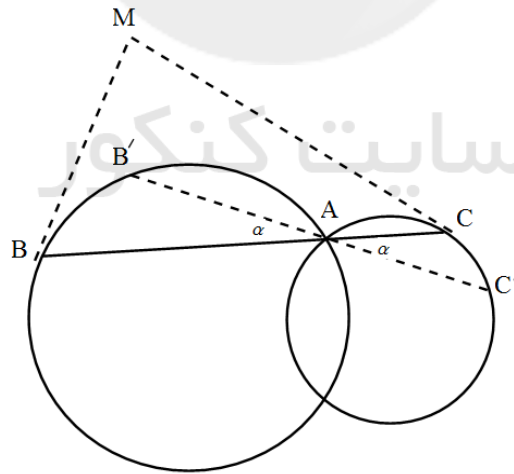
$$MB + MC = MD + MC > DC = DA + AC = AB + AC$$

و لذا:

$$\frac{MB + MC}{AB + AC} > 1$$



۱۲۹. گزینه ۴

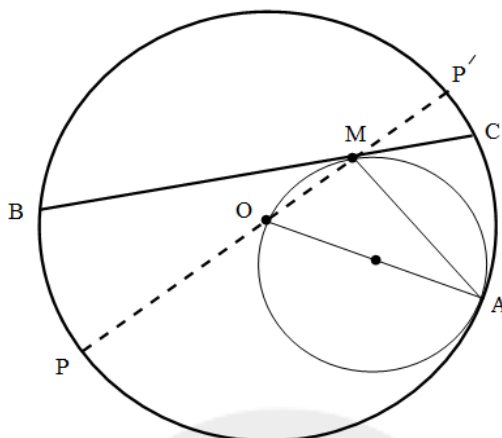


با چرخش خط قاطع حول  $A$ ، جمع دو کمان  $AB$ ،  $AC$  ثابت می‌ماند. زیرا اگر خط قاطع را در موضع  $B'C'$  در نظر بگیریم داریم:

$$AB' + AC' = AB - BB' + AC + CC' = AB - 2\alpha + AC + 2\alpha = AB + AC$$

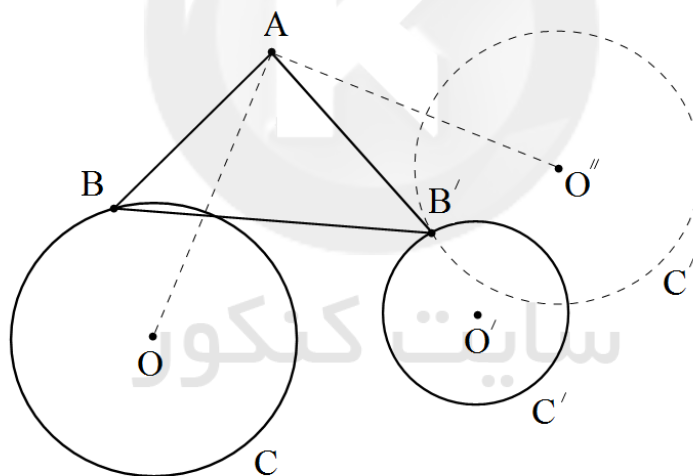
بنابراین مجموع دو زاویه  $B$  و  $C$  همواره ثابت است پس اندازه‌ی زاویه‌ی  $M$  ثابت می‌ماند.

۱۳۰. گزینه ۲



$$MB \times MC = MP \times MP' = (R + MO)(R - MO) = R^2 - MO^2 = MA^2$$

۱۳۱. گزینه ۴



دو دایره  $C$  و  $C'$  و نقطه‌ی  $A$  را در نظر می‌گیریم. دایره‌ی  $C$  را حول نقطه‌ی  $A$ ،  $90^\circ$  درجه دوران داده و دوران یافته‌ی آن را  $C''$  می‌نامیم. نقطه‌ی  $B'$  را روی فصل مشترک دو دایره‌ی  $C'$  و  $C''$  در نظر می‌گیریم. دوران یافته‌ی نقطه‌ی  $B'$  حول  $A$  و زاویه‌ی  $-90^\circ$  درجه، نقطه‌ی  $B$  است که روی دایره‌ی  $C$  واقع است. بدین ترتیب مثلث متساوی‌الساقین و قائم‌الزاویه‌ی مورد نظر تشکیل می‌شود.

" حل این مساله توسط آقایان علیرضا ظهیری و مرتضی رشیدی‌نیا فارغ‌التحصیلان مرکز استعدادهای درخشان شهید بهشتی شهر ری صورت گرفت. "

۱۳۲. گزینه ۳

نقاط  $A, B, C$  و  $D$  را در نظر می‌گیریم. از سه نقطه‌ی  $B, C$  و  $D$  یک صفحه می‌گذرد. خطی که وسط اضلاع  $BC$  و  $BD$  را به هم وصل می‌کند،  $l_1$  می‌نامیم. حال نقاط  $B, C$  و  $D$  از هر صفحه‌ی گذرنده بر  $l_1$  به یک فاصله‌اند. در میان همه‌ی صفحات گذرنده از  $l_1$ ، صفحه‌ای را در نظر می‌گیریم که فاصله‌ی آن تا نقطه‌ی  $A$  نیز برابر با فاصله‌ی آن از سه نقطه‌ی دیگر باشد. بدین ترتیب اگر خطوط  $l_2$  و  $l_3$  را وسط اضلاع در نظر بگیریم، سه صفحه می‌توان با این خاصیت به دست آورد.

۱۳۳. گزینه ۲

$$A = (3, 1, 0)$$

$$B = (-1, 5, 4)$$

$$M = (x, y, z) \Rightarrow \overline{AM} = (x - 3, y - 1, z)$$

$$\overline{AM} = -\frac{3}{4}\overline{AB} \Rightarrow (x - 3, y - 1, z) = -\frac{3}{4}(-4, 4, 4)$$

$$\Rightarrow x = 6, y = -2, z = -3$$

$$\Rightarrow M = (6, -2, -3) \Rightarrow \overline{OM} = (6, -2, -3)$$

$$\Rightarrow \cos \beta = \frac{-2}{\sqrt{36 + 4 + 9}} = -\frac{2}{7}$$

۱۳۴. گزینه ۳

بردارهای هادی دو خط به ترتیب  $u_1 = (a, 2, 4)$  و  $u_2 = (2, 1, -2)$  اند. از هر کدام از خطوط یک نقطه انتخاب می‌کنیم.

$$A = (-b, 3, 0) \in L_1$$

$$B = (0, \frac{3}{2}, -5) \in L_2$$

باید داشته باشیم:

$$\overline{u_1} \cdot \overline{u_2} = 0 \quad (1)$$

$$\begin{vmatrix} -b & 3 & 5 \\ a & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad (2)$$

از اولین شرط ( $\overline{u_1} \cdot \overline{u_2} = 0$ ) نتیجه می‌شود:

$$2a + 2 - 8 = 0 \Rightarrow a = 3$$

و از دومین شرط داریم:

$$\begin{vmatrix} -b & \frac{3}{2} & 5 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow b = -2$$

۱۳۵. گزینه ۱

ابتدا فصل مشترک دو صفحه را می‌یابیم

$$z = 4, \quad 4x + 3y - z = 2 \\ \Rightarrow 4x = -3y + 6 \Rightarrow 4x = -3(y - 2)$$

بنابراین معادله‌ی فصل مشترک در صفحه به صورت زیر است:

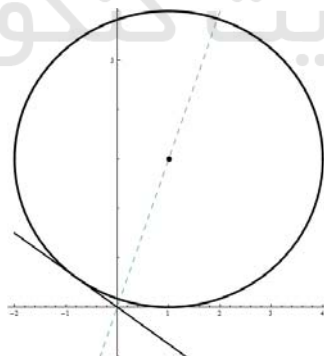
$$\frac{x}{-3} = \frac{y-2}{4}, \quad z = 4$$

حال فاصله‌ی نقطه  $A(2, 1, 5)$  را از این خط می‌یابیم:

نقطه‌ی  $P(0, 2, 4)$  از خط است و داریم:  $\overline{AP} = (-2, 1, -2)$

$$\frac{|\vec{u} \times \overline{AP}|}{|\vec{u}|} = \frac{\left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \right|}{\sqrt{9+16+0}} = \frac{|-4i - 3j + 5k|}{5} = \frac{\sqrt{16+9+25}}{5} = \frac{5\sqrt{2}}{5} = \sqrt{2}$$

۱۳۶. گزینه ۱



ابتدا معادله نیم‌ساز در خط  $y = 0$  و  $3x + 4y = 0$  را می‌یابیم.

$$\frac{|3x+4y|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|y|}{\sqrt{1}} \Rightarrow |3x+4y| = |5y|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x+4y = 5y \Rightarrow y = 3x \\ 3x+4y = -5y \Rightarrow 9y = -3x \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x \end{cases}$$

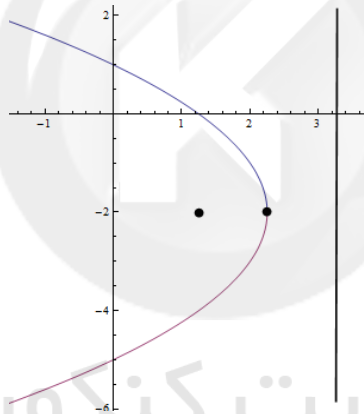
مرکز دایره‌ی مورد نظر روی این نیم‌ساز است پس مختصات مرکز به صورت  $(\alpha, 3\alpha)$  است و مختصات نقطه تماس با محور  $x$  ها به صورت  $(\alpha, 0)$  است بنابراین معادله‌ی دایره به صورت:

$$(x-\alpha)^2 + (y-3\alpha)^2 = 9$$

است و نقطه‌ی  $(\alpha, 0)$  در این معادله صادق است بنابراین:

$$(\alpha-\alpha)^2 + (0-3\alpha)^2 = 9 \Rightarrow \alpha^2 = 1 \Rightarrow \alpha = 1$$

۱۳۷. گزینه ۳



$$P = 1$$

$$F = (\alpha - 1, -2)$$

$$S = (\alpha, -2)$$

معادله‌ی سهمی به صورت  $(y+2)^2 = -4(x-\alpha)$  است. همچنین نقطه  $(1, 0)$  نقطه‌ای از سهمی است پس:

$$(1+2)^2 = -4(0-\alpha) \Rightarrow \alpha = \frac{9}{4}$$

۱۳۸. گزینه ۴

ارتباط دستگاه جدید بر حسب دستگاه قدیم به صورت زیر است:

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta + y \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) \\ y' = -x \sin \theta + y \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x+y) \end{cases}$$

$$\frac{y''}{2} - \frac{x''}{10} = 1 \Rightarrow 5y'' - x'' = 10$$

$$\Rightarrow 5\left(\frac{1}{2}(-x+y)'\right) - \frac{1}{2}(x+y)'' = 10$$

$$\Rightarrow 5(x'' - 2xy' + y'') - (x'' + 2xy' + y'') = 20$$

$$\Rightarrow 4x'' - 12xy' + 4y'' = 20$$

$$\Rightarrow x'' - 3xy' + y'' = 5$$

۱۳۹. گزینه ۴

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^T - 4A = A(A - 4I)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = 5I$$

۱۴۰. گزینه ۳

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* = \frac{\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}}{|A|}$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 10$$

$$|A| = -2(12 - 20) + 1(4 - 5) = -2 \times (-8) - 1 = 16 - 1 = 15$$

بنابراین درایه‌ی سطر دوم و ستون سوم ماتریس  $A^{-1}$  برابر  $\frac{10}{15} = \frac{2}{3}$  است.



پاسخ تشریحی سؤالات دروس ریاضی کنکور سراسری خارج از کشور سال ۱۳۹۴ توسط  
سیدامیر ستوده

۱۴۱. گزینه ۱

۱۴۲. گزینه ۲

حدود دسته	مرکز دسته	فراوانی
$[9, 11)$	۱۰	۸
$[11, 13)$	۱۲	۱۱
$[13, 15)$	۱۴	۱۶
$[15, 17)$	۱۶	۱۴
$[17, 19)$	۱۸	۱۱

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{8 \times 10 + 11 \times 12 + 16 \times 14 + 14 \times 16 + 11 \times 18}{8 + 11 + 16 + 14 + 11}$$

$$= \frac{858}{60} = 14 \frac{3}{5}$$

۱۴۳. گزینه ۴

مبدأ استقرا به ازای  $k = 1$  برقرار است:

$$p(k): (1+a)^k \geq 1+ka$$

$$p(k+1): (1+a)^{k+1} \geq 1+(k+1)a$$

با ضرب طرفین نامساوی فرض استقرا در  $(1+a)$  داریم:

$$(1+a)^k (1+a) \geq (1+ka)(1+a)$$

$$= 1+a+ka+ka^2$$

$$= 1+(k+1)a+ka^2$$

$$\geq 1+(k+1)a$$

در انتهای اثبات از اینکه  $ka^2 \geq 0$  استفاده شده است.

۱۴۴. گزینه ۳

$$S = \{3, 9, 15, \dots, 63\}$$

اعضای  $S$  را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$s = \{(3, 63), (9, 57), (15, 51), (21, 45), (27, 39), 33\}$$

اگر یک زیر مجموعه ۷ عضوی از  $S$  انتخاب شود آنگاه مطمئناً دو عضو با مجموع ۶۶ در آن وجود دارد.

۱۴۵. گزینه ۴

$$A = \{1, 2, \{1, 2, 3\}\}$$

$$B = \{1, 2, 3, \{1, 2\}\}$$

$$C = \{1, 2, 3\}$$

$$A - B = \{\{1, 2, 3\}\} = \{C\} \neq C$$

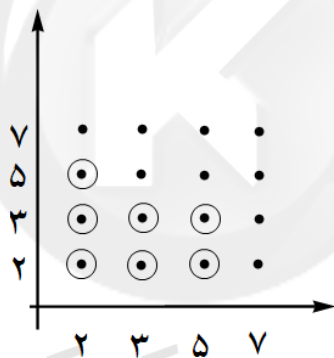
$$B - C = \{\{1, 2\}\} \neq \emptyset$$

ضمناً  $B - C \neq \{1, 2\}$

۱۴۶. گزینه ۱

$$A = \{2, 3, 5, 7\}$$

$$aRb \Leftrightarrow 2a + 3b < 20$$

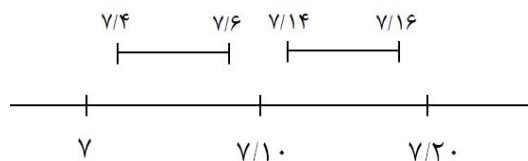


رابطه‌ی  $R$  هفت عضو دارد.

۱۴۷. گزینه ۳

$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{6} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} = \frac{7}{24}$$

۱۴۸. گزینه ۲



$$\frac{2+2}{20} = \frac{4}{20} = \frac{2}{10} = 0.2$$

۱۴۹. گزینه ۴

$$\binom{5}{4} \frac{(4-1)!}{2} = 5 \times \frac{3!}{2} = 5 \times 3 = 15$$

۱۵۰. گزینه ۲

$$\left. \begin{array}{l} a \equiv 5 \equiv 59 \\ a \equiv 7 \equiv 59 \end{array} \right\} \Rightarrow a \equiv 59 \equiv 20$$

$$a \equiv 7 \equiv 59$$

۱۵۱. گزینه ۱

$$\begin{aligned} (abc)_9 &= (cba)_8 \\ 25a + 5b + c &= 64c + 8b + a \\ 24a - 3b &= 63c \\ 8a - b &= 21c \\ b &= 8a - 21c \\ a = 3 &\Rightarrow c = 1 \Rightarrow b = 3 \\ \Rightarrow a + b + c &= 3 + 3 + 1 = 7 \end{aligned}$$

۱۵۲. گزینه ۴

$$11^3 \equiv 1 \Rightarrow 11^{3k} \equiv 1$$

اگر  $a = 3k$  آنگاه  $a$  قابل قبول است. پس مضارب دو رقمی ۳ را باید بشماریم که عبارت‌اند از:

۱۲, ۱۵, ۱۸, ..., ۹۹

و تعداد آن‌ها برابر  $1 + \frac{99-12}{3} = 30$  است.

۱۵۳. گزینه ۱

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۱۵۴. گزینه ۲

$$\left. \begin{array}{l} y_1 = x_1 - 1 \\ y_2 = x_2 - 1 \\ y_3 = x_3 - 1 \end{array} \right\} \Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 = 7, \quad 0 \leq y_i \leq 4$$

تعداد جواب‌های این معادله طبق اصل شمول و عدم شمول برابر است با

$$\binom{7+3-1}{3-1} - 3 \times \binom{2+3-1}{3-1} = \binom{9}{2} - 3 \times \binom{4}{2} = 36 - 18 = 18$$

۱۵۵. گزینه ۱

طبق قاعده بیض احتمال مورد نظر برابر است با:

$$\frac{\frac{55}{100} \times \frac{3}{100}}{\frac{55}{100} \times \frac{3}{100} + \frac{45}{100} \times \frac{5}{100}} = \frac{11}{26}$$



سایت کنکور